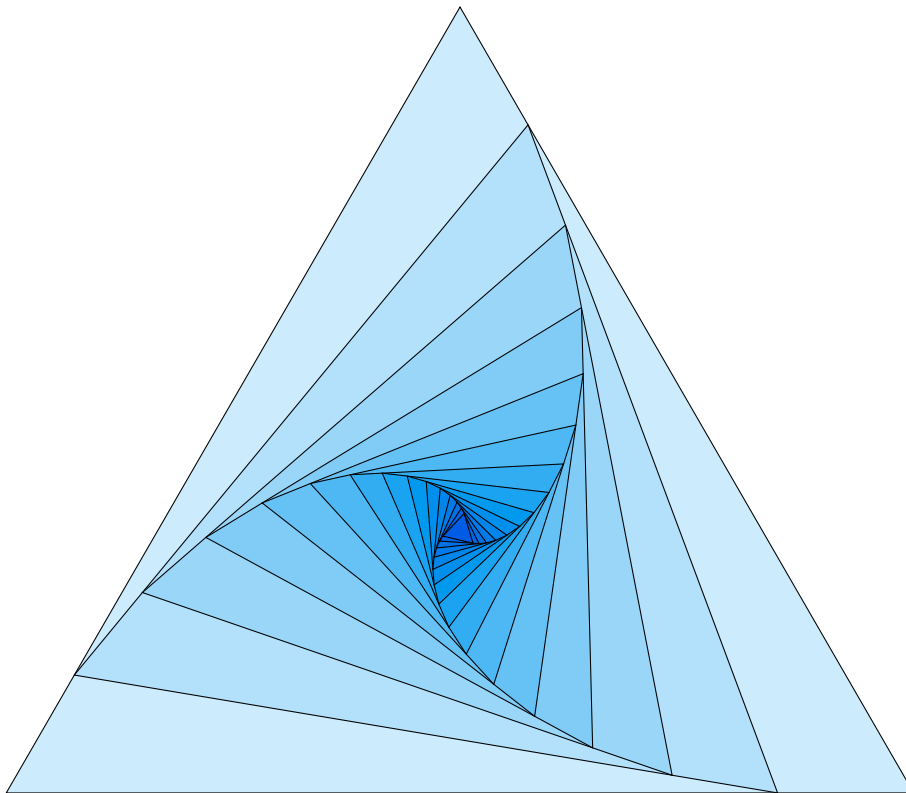


Höhere Analysis

Skript vom SS 11

Ingo Bürk

15. Juli 2011



Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	2
Vorwort	3
I. Zur Theorie der Funktionen einer komplexen Variablen	4
I.1. Die Topologie von \mathbb{C}^* . Die Möbiustransformation	4
I.2. Mehrwertige Abbildungen. Riemannsche Flächen	6
I.3. Differenzierbarkeit	7
I.4. Die „partiellen Ableitungen“ $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$	10
I.5. Die Cauchy-Riemann-Gleichungen und $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$	11
I.6. Holomorphie, Gebiete	12
I.7. Kurvenintegrale	15
I.8. Der Integralsatz von Cauchy	18
I.9. Die Formel von Cauchy	26
I.10. Nullstellen analytischer Funktionen	33
I.11. Das Maximumsprinzip	36
I.12. Singularitäten	38
I.13. Residuensatz und Residuenkalkül	44
I.14. Das Zählen von Pol- und Nullstellen	47
I.15. Harmonische Funktionen	48
II. Fourieranalysis	51
II.1. Motivation	51
II.2. Das Kriterium von Dini	53
II.3. Fourierintegral und Fouriertransformation	57
II.4. Hilberträume und Fouriertransformationen	61
II.5. Delta-Folgen. Die Diracsche Delta-Funktion	65
II.6. Wichtige Eigenschaften der Fouriertransformation	69
II.7. Fouriertransformation und Faltung	71

Vorwort

Dieses Skript entstand im Rahmen der „Höhere Analysis“ - Vorlesung bei Hr. Prof. Timo Weidl als Vorlesungsmitschrieb.

Es kann nicht garantiert werden, dass dieses Dokument fehlerfrei ist und der Autor übernimmt für möglicherweise entstandene Schäden jeglicher Art keine Haftung. Dieser Mitschrieb ist kein offizielles Dokument der Universität Stuttgart, Mitarbeiter eben dieser tragen daher ebenfalls keine Verantwortung.

Bei Fragen oder dem Auffinden von Fehlern können Sie mir gerne eine Nachricht zukommen lassen. Schreiben Sie mir dafür einfach eine eMail an die folgende Adresse:

admin@airblader.de

Dieses Werk ist unter einem „*Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Germany*“-Lizenzvertrag lizenziert. Um die Lizenz anzusehen, gehen Sie bitte zu

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/>

oder schicken Sie einen Brief an

Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California 94105, USA.

Ein besonderer Dank geht an die folgenden Personen:

- **Jim Magiera**
für diverse L^AT_EX-Codefragmente, die das Aussehen dieses Dokuments maßgeblich bestimmen,

Mit freundlichen Grüßen,
Ingo Bürk.

I. Zur Theorie der Funktionen einer komplexen Variablen

I.1. Die Topologie von \mathbb{C}^* . Die Möbiustransformation

Wie gewohnt stellen wir komplexe Zahlen als $\mathbb{C} \ni z = (x, y) = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar. Dabei ist $i = (0, 1)$ die imaginäre Einheit und es gilt $i^2 = -1 = (-1, 0)$. Das komplexe Konjugat ist definiert als $\bar{z} = x - iy$ und der Betrag als $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Zudem haben wir durch $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ eine Metrik gegeben, womit wir einen Konvergenzbegriff in \mathbb{C} definieren können. Ferner haben wir Umgebungen $U_\varepsilon(z) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < \varepsilon\}$ gegeben.

Frage: Wie verstehen wir „ ∞ “ im komplexen Fall?

In der komplexen Ebene gibt es keine $<$ -Relation, komplexe Zahlen lassen sich also nicht vergleichen. Den Konvergenzbegriff für $\pm\infty$, den wir in \mathbb{R} hatten, können wir in \mathbb{C} daher nicht auf die selbe Art und Weise definieren.

Riemannsche Zahlenkugel

Mittels der stereographischen Projektion weist man jedem Punkt $z = (x, y)$ auf der komplexen Zahlenebene einen Punkt (ξ, η, ζ) auf der Einheitskugel zu. Der „Nordpol“ dieser Kugel stellt dann ∞ dar. Damit wird folgende Definition naheliegend:

Definition I.1.1 Konvergenz gegen ∞

Eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $z_n \in \mathbb{C}$ konvergiert genau dann gegen unendlich ($z_n \rightarrow \infty$), wenn $|z_n| > R$ für alle $n \geq N_R$. Dann ist $z_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \frac{1}{z_n} \rightarrow 0$.

Die Abbildung $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \leftrightarrow \mathbb{C}$ ist stetig und bijektiv und es gilt gewissermaßen „ $(0, 0, 1) = \infty$ “. Damit ist $\mathbb{S}^2 \leftrightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ stetig und bijektiv.

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \xi^2 + \eta^2 = \zeta(1 - \zeta)$$

Da die Punkte $(0, 0, 1)$, (ξ, η, ζ) und (x, y) auf einer Geraden liegen sollen muss gelten:

$$\frac{\xi - 0}{x - 0} = \frac{\eta - 0}{y - 0} = \frac{\zeta - 1}{0 - 1}.$$

Die Geradengleichung sieht wie folgt aus:

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta}.$$

Daraus erhält man

$$x^2 + y^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1 - \zeta)^2} = \frac{\zeta}{1 - \zeta}$$

$$\Leftrightarrow \zeta = \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2},$$

sowie

$$\xi = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \quad \eta = \frac{y}{1 + x^2 + y^2}.$$

Wichtige geometrische Eigenschaften

Ein Kreis in \mathbb{C}^* ist entweder ein Kreis in \mathbb{C} , wie wir ihn kennen, oder aber eine Gerade in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Diese kann als entarteter Kreis mit dem Radius ∞ aufgefasst werden. Die stereographische Projektion erhält *Kreise* und *Winkel* (der Beweis wird zur Übung überlassen).

Die lineare Abbildung

Gegeben sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ oder $f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ mit $z \mapsto w := az + b$, wobei $a, b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$ ist.

Spezialfall: Es sei $a = 1$, dann ist $w = z + b$. Geometrisch entspricht dies einer Verschiebung und die Abbildung erhält Kreise und Winkel.

Spezialfall: Sei nun $b = 0$ und $|a| = 1$. Dann ist $a = e^{i\beta}$ mit $\beta = [0, 2\pi[$. Dies entspricht geometrisch einer Drehung um den Winkel β . Auch dies erhält Kreise und Winkel.

Spezialfall: Nun sei $b = 0$ und $a = r > 0$ ($r \in \mathbb{R}^+$). Dies entspricht nun einer Streckung bzw. Stauchung um den Faktor r . Wie verhält es sich hier nun mit Kreisen und Winkeln? Allgemein gilt, dass $z \mapsto az + b = w$ eine Komposition der oben genannten elementaren Abbildungen ist und daher Kreise und Winkel erhalten werden müssen (auch in \mathbb{C}^*).

Die Abbildung $w = \frac{1}{z}: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$

Hat man Winkel (Argument) und Entfernung vom Ursprung (Betrag) einer komplexen Zahl, so entspricht die Abbildung der Kombination von Spiegeln am Einheitskreis und spiegeln an der reellen Achse. Auch diese Abbildung erhält Kreise und Winkel. Der Beweis wird zur Übung überlassen.

Die Möbius-Transformation

Die Möbiustransformation ist gegeben durch

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit } a, b, c, d \in \mathbb{C},$$

wobei zusätzlich $ad - bc \neq 0$ gefordert wird. Es wird dem Leser überlassen, sich die Frage zu stellen, weshalb man dies fordert. Mit dieser zusätzlichen Forderung ist die Möbiustransformation eine stetige und bijektive Abbildung $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$. Die Umkehrtransformation ist gegeben durch

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Auch die Umkehrtransformation erhält Kreise und Winkel, denn $w = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)}$ ist eine Komposition elementarer Abbildungen, sowie von $\frac{1}{z}$. Weiterhin gilt, dass die Komposition von Möbiustransformationen wieder eine Möbiustransformation ist. Auch wird dem Leser aufgetragen, sich Gedanken darüber zu machen, inwiefern Möbiustransformationen mit 2×2 -Matrizen zusammenhängen:

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \xleftrightarrow{?} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Eine Möbiustransformation ist gegeben durch *drei* (und *nicht vier*) komplexe Parameter. Dementsprechend sind drei (komplexe) Gleichungen notwendig, um eine Möbiustransformation zu bestimmen.

Wir schreiben $w = \text{MT}(z)$, wenn wir drei Gleichungen $w_j = \text{MT}(z_j)$ ($j = 1, 2, 3$) mit $z_j \neq z_k$ für $j \neq k$ haben. Dann ist MT wohldefiniert.

Kennt man drei Punkte der Transformation, so kann man mittels der Eigenschaft der Winkel- und Kreiserhaltung den Bildpunkt jedes anderen Punktes rein geometrisch ermitteln. Gehen wir von einer allgemeinen Transformation $w = \frac{az+b}{cz+d}$ aus, so haben wir für $j = 1, 2, 3$ Punkte $w_j = \frac{az_j+b}{cz_j+d}$ gegeben. Dann ist

$$w_k - w_j = \frac{(ad - bc)(z_k - z_j)}{(cz_k + d)(cz_j + d)} \Rightarrow \frac{\frac{w-w_1}{w-w_2}}{\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}} = \frac{\frac{z-z_1}{z-z_2}}{\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}}$$

$=: (w_1, w_2, w, w_3) \quad =: (z_1, z_2, z, z_3)$

Die Schreibweise „ $(w_1, w_2, w, w_3) = (z_1, z_2, z, z_3)$ “ ist also so zu verstehen, dass diese Bruchterme gleich sind, nicht die Einträge der Tupel selbst.

Bildet man einen Kreis unter einer Möbiustransformation ab, so wird das Innere des Kreises entweder komplett auf das Innere oder komplett auf das Äußere des Bildkreises abgebildet. Da Geraden nur (entartete) Kreise sind sollte man aber beachten, dass es dadurch durchaus sein kann, dass das Innere eines Kreises auf eine obere Halbebene abgebildet werden kann (und umgekehrt).

I.2. Mehrwertige Abbildungen. Riemannsche Flächen

Wir erinnern uns zunächst an das Wurzelziehen in den komplexen Zahlen. Um einen Ausdruck wie „ $w = \sqrt[n]{z}$ “ ($n \in \mathbb{N}$) zu definieren schreiben wir $z = re^{i\varphi}$ und erhalten dann

$$w_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)}, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

also mehrere Lösungen statt einer eindeutig bestimmten Zahl und haben es daher mit einer mehrwertigen Abbildung zu tun. Es stellt sich auch heraus, dass es nichts nützt, sich auf einen Wert für k zu einigen: Es gibt keinen Zweig der Wurzel, der eine auf ganz \mathbb{C} stetige Wurzelfunktion induziert. Wir haben es daher mit einem grundlegenden Problem zu tun.

Nehmen wir aber nun so viele „Kopien“ von \mathbb{C} wie wir Werte in der mehrwertigen Abbildung zuweisen und weisen dem Punkt in jeder Kopie je einen dieser Werte zu, so können wir das Problem vorerst in den Griff bekommen, indem wir einwertige, dafür mehrere, Abbildungen bekommen. Damit man die Stetigkeit erhalten kann muss man diese „Kopien“ von \mathbb{C} allerdings auf eine bestimmte Art und Weise „verkleben“. Anschaulich kann man sich (beispielhaft für drei Kopien) drei komplexe Ebenen vorstellen, in die man jeweils in Form einer Halbachse einen Schnitt einfügt. In der ersten Ebene bezeichnet man die beiden Schnittkanten mit 0 und 1, in der zweiten Ebene mit 1 und 2 und in der dritten Ebene mit 2 und 0 und verklebt sie anschließend. Wie man den Schnitt einführt ist topologisch irrelevant, solange man in allen Kopien den selben Schnitt verwendet. Man nennt das entstehende topologische Konstrukt eine **Riemannfläche**.

Natürlich ist diese anschauliche Konstruktion gedanklich und in der Praxis ebensowenig durchführbar wie ein Möbiusband im Zweidimensionalen. Dies stellt kein Problem dar, wenn wir uns folgendes Zitat vor Augen halten:

„Da wir Mathematiker uns aber dem Göttlichen nähern ...“ - Timo Weidl.

Nehmen wir uns die Funktion $f(z) = \sqrt{z(1-z)} = \sqrt{z}\sqrt{1-z}$ vor. Die beiden Verzweigungspunkte sind hier die 0 und die 1. Ein Weg, der keinen der beiden Punkte umfährt, bereitet uns bei der Stetigkeit keine Probleme. Umlaufen wir jedoch einen oder gar beide Punkte, so springt das Argument des Bildpunktes jeweils um π . Wir bedienen uns nun der Riemannflächen und verkleben zwei Kopien von \mathbb{C} entsprechend der obigen Umschreibung. Verbindet man die 0 und die 1 in \mathbb{C} , so erhält man eine Linie, die, wird sie vom Weg in \mathbb{C} geschnitten, zum Ausdruck bringt, dass man in der Riemannfläche auf die andere Ebene springt. Ein Weg, der die 0 und 1 nicht umläuft, diese Gerade aber schneidet, wird also beide Ebenen durchlaufen, aber auf ein- und derselben Ebene (d.h. im exakt selben Punkt) wieder herauskommen. Wege, die völlig abseits liegen, starten, verlaufen und enden auf derselben Ebene. Ein Weg um die 0 hingegen startet auf der einen, endet aber auf der anderen Ebene, da er die Schnittkante nur einmal kreuzt.

Wir beschäftigen uns nun mit dem Logarithmus und erinnern uns zunächst daran, dass wir $w = \text{Ln}$ genau dann geschrieben haben, wenn $e^w = z$ ist. Für $z = re^{i\varphi}$ und $w = u + iv$ ($u, v \in \mathbb{R}$) ist dann $u = \ln r$ und $v = \arg z = \varphi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Die Riemannfläche ist in diesem Fall eine Sammlung unendlich vieler Kopien von \mathbb{C} , die wie eine Art Parkhaus spiralförmig verklebt sind.

I.3. Differenzierbarkeit

Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und $z_0 \in U$ ein Punkt. Ferner sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexe Abbildung. Wir wollen uns nun mit dem Begriff der *komplexen Ableitung* beschäftigen. Es ist

$$f'(z_0) = \lim_{\mathbb{C} \ni h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h},$$

wobei das Augenmerk auf der scheinbar unwichtigen Information $h \in \mathbb{C}$ liegt. Wegen $U \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ und dem Bildraum $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ können wir f auch als eine vektorwertige Abbildung $f = u + iv = (u, v)$ auffassen. Da u und v von $z = x + iy = (x, y)$ abhängen ist dies auch als $f(z) = (u(x, y), v(x, y)) = u(x, y) + iv(x, y)$ aufzufassen.

Spezialfall: $h = x \rightarrow 0$. In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(z_0 + x) + iv(z_0 + x) - u(z_0) - iv(z_0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{u(z_0 + x) - u(z_0)}{x} + i \frac{v(z_0 + x) - v(z_0)}{x} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0). \end{aligned}$$

Spezialfall: Sei nun $h = iy$ mit $\mathbb{R} \ni y \rightarrow 0$. Wir nähern uns nun also auf der Im-Achse der Null. Dann ist

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{u(z_0 + iy) - u(z_0) + i(v(z_0 + iy) - v(z_0))}{iy} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{v(z_0 + iy) - v(z_0)}{y} - i \frac{u(z_0 + iy) - u(z_0)}{y} \right) \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(z_0). \end{aligned}$$

Da die Existenz des Grenzwertes für beliebige $h \in \mathbb{C}$ aber voraussetzt, dass diese Ergebnisse gleich sind, folgt, im Falle der komplexen Differenzierbarkeit in $z_0 \in \mathbb{C}$ von f , dass die partiellen Ableitungen von u und v (sowohl nach x als auch nach y) existieren und dass gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Diese Gleichungen nennt man die **Cauchy-Riemann-Gleichungen**. Die komplexe Ableitung einer Funktion lässt sich dann auf viele verschiedene Arten ausdrücken:

$$\left. \frac{df}{dz} \right|_{z=z_0} = u'_x + iv'_x = v'_y - iu'_y = u'_x - iu'_y = v'_y + iv'_x.$$

Man sollte hier festhalten, dass dieses Ergebnis insofern erstaunlich ist, als dass wir Funktionen komplex differenzieren können, indem wir *nur* den Real- oder Imaginärteil kennen und der jeweils andere Teil nicht in die Ableitung eingeht. Dieser Eigenschaft geht dementsprechend ein hoher Preis voraus: Die Voraussetzung der komplexen Differenzierbarkeit.

Sei nun $w_0 = f'(z_0)$. Dann können wir $f(z) = f(z_0) + w_0 h + o(|h|)$ schreiben, wobei $z - z_0 = h = h_x + ih_y$ ist. Ferner sei $u_0 = u(x_0, y_0)$ und $v_0 = v(x_0, y_0)$, dann ist

$f(z) = u + iv$ und $f(z_0) = u_0 + iv_0$. Außerdem merken wir an, dass $|h|_{\mathbb{C}} = \left\| \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{R}^2}$ gilt. Nun ist

$$\begin{aligned} u &= u_0 + (w_{0,r}h_x - w_{0,i}h_y) + o\left(\left\| \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} \right\|\right) \\ v &= v_0 + (w_{0,i}h_x + w_{0,r}h_y) + o\left(\left\| \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} \right\|\right), \end{aligned}$$

wobei $w_{0,r} = \operatorname{Re} w_0$ und $w_{0,i} = \operatorname{Im} w_0$. Damit folgt dann

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_{0,r} & -w_{0,i} \\ w_{0,i} & w_{0,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} + o(\|h\|)$$

Dies können wir mit den Identitäten aber auch schreiben als

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} + o(\|h\|)$$

Also ist $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ Frechet-differenzierbar und die Ableitung ist gerade $\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}$. Was bedeutet dies nun? Es ist

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \underbrace{\sqrt{w_{0,r}^2 + w_{0,i}^2}}_{=|w|} \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix},$$

und dies entspricht gerade einer Drehung mit einem Vorfaktor, der wiederum einer Streckung oder Stauchung entspricht. Beides sind winkelerhaltende Abbildungen. Die \mathbb{C} -differenzierbaren Abbildungen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ entsprechen *lokal* also einer Streckung / Stauchung und Drehung, wobei der Wert der Streckung / Stauchung natürlich vom Punkt abhängt. Abbildungen, die solche Eigenschaften besitzen, nennt man **konforme** Abbildungen.

Wir können nun also sagen: Ist eine Funktion \mathbb{C} -differenzierbar, so gelten zum Einen die Cauchy-Riemann-Gleichungen, zum Anderen ist die Vektorabbildung Frechet-differenzierbar mit oben genannter Ableitung. Was passiert nun aber, wenn wir uns eine vektorwertige Funktion vorgeben, von der wir wissen, dass sie Frechet-differenzierbar ist und dass die Cauchy-Riemann-Gleichungen für sie gelten? Man sieht, dass man in diesem Fall die ganze Argumentation auch rückwärts durchführen kann und so sogar eine Äquivalenz erhält. Diese zentrale Eigenschaft wollen wir in einem Satz festhalten:

Satz I.3.1

Eine Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann \mathbb{C} -differenzierbar, wenn die Cauchy-Riemann-Gleichungen gelten und f als Vektorabbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ aufgefasst Frechet-differenzierbar ist.

Bemerkung: Wir haben hier alles lokal für einen Punkt z_0 gemacht, können dies aber natürlich für alle Punkte $z_0 \in \mathbb{C}$ durchführen.

Annahme: Es existieren alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung und sie sind sogar stetig. Betrachten wir nun die Cauchy-Riemann-Gleichungen, so folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.\end{aligned}$$

Dann folgt, dass folgende Gleichung gilt:

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u = 0.$$

Analog kann man zeigen, dass auch Folgendes gilt:

$$\Delta v = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v = 0.$$

Diese Gleichungen sind in der Physik enorm wichtig, zum Beispiel in der Strömungslehre. Es gibt allerdings kein Analogon der komplexen Zahlen in drei Dimensionen. Es gibt jedoch Quaternionen, die mit vier Komponenten arbeiten.

„Wir haben das Pech, dass wir zwischen den Dimensionen 2 und 4 leben.“ -
Timo Weidl

Solche Funktionen, bei denen alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung existieren und stetig sind, und welche die obigen Gleichungen erfüllen, nennt man **harmonisch**.

I.4. Die „partiellen Ableitungen“ $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$

Es ist $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Dabei ist $z = x + iy$ und $\bar{z} = x - iy$. Damit ist dann $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ und $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$. Also ist

$$f(z) = f(x, y) = f\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right).$$

Diese Funktion hängt formal von z und \bar{z} ab, die aber beide wiederum voneinander abhängen. Wir gehen nun aber davon aus, dass z und \bar{z} *nicht* voneinander abhängen, ganz nach dem Motto

„Ich hab kein Geld aber ich tu mal so als ob.“ - Timo Weidl

Es ist also Obiges auch gleich $\tilde{f}(z, \bar{z})$. Dann ist

$$\frac{D(z, \bar{z})}{D(x, y)} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

und wir können die Koordinaten transformieren mittels

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D(x, y) \\ D(z, \bar{z}) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$$

und es folgt dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Damit lässt sich die Ableitung von \tilde{f} wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \tilde{f}(z, \bar{z}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \tilde{f}(z, \bar{z}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) \end{aligned}$$

Beispiel I.4.1:

Es sei $f(z) = z$. Dann ist (wir schreiben einfach f für \tilde{f}):

$$\frac{\partial}{\partial z} f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (x + iy) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Andererseits ist auch

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (x + iy) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

I.5. Die Cauchy-Riemann-Gleichungen und $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$

Sei f komplex differenzierbar.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (u(x, y) + iv(x, y)) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_{=0} + \frac{i}{2} \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)}_{=0}, \end{aligned}$$

das heißt, dass $(u + iv)$ die Cauchy-Riemann-Gleichungen genau dann erfüllt, wenn $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}f = 0$ ist. Manchmal schreibt man kurz $\partial = \frac{\partial}{\partial z}$ und $\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

Beispiele:

- $f(z) = z^n$ ist komplex differenzierbar.
- $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$ ist *nicht* komplex differenzierbar.
- Sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Dies konvergiert für $|z| < R$ und konvergiert *nicht* für $|z| > R$. Was auf dem Rand passiert können wir nicht sagen. Die Konstante R lässt sich mit der Formel von Hadamard wie folgt berechnen:

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

Die Konvergenz im Inneren ist absolut und in einem echt kleineren Kreis (also $|z| \leq R' < R$) sogar gleichmäßig. Ferner gilt, dass die Funktion in jedem echt kleineren Kreis $|z| \leq R' < R$ gliedweise komplex differenzierbar. Damit kann man die Funktion in jedem Punkt $|z| < R$ komplex differenzieren (indem man ggf. das R' anpasst). Die Ableitung ist dann

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$$

und wir werden sehen, dass eine einmal ableitbare Funktion auch unendlich oft ableitbar ist. Man beachte, dass dies in \mathbb{R} *nicht* der Fall war.

I.6. Holomorphie, Gebiete

Definition I.6.1 Holomorphie

Sei $f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit U offen. Dann ist f **holomorph** in $z_0 \in U$ genau dann, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass f in allen z mit $|z - z_0| < \varepsilon$ komplex differenzierbar ist.

Ferner heißt f holomorph in U (wir schreiben $f \in \mathcal{A}(U)$) genau dann, wenn f in allen Punkten $z_0 \in U$ holomorph ist.

Definition I.6.2 Zusammenhang

Es sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge. Wir nennen G **zusammenhängend** genau dann, wenn es *keine* offenen Mengen $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$ gibt, so dass gilt

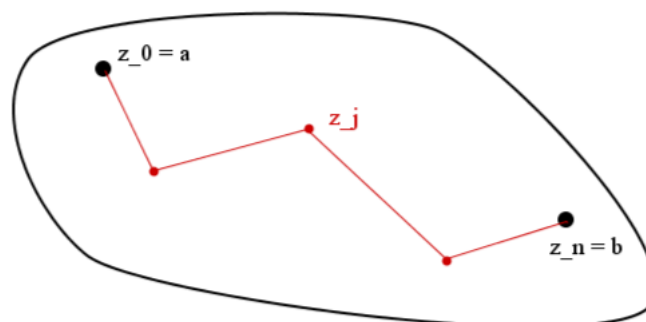


Abbildung 1: Polygonzug in einer zusammenhängenden Menge

- $G_1 \neq \emptyset, G_2 \neq \emptyset$
- $G_1 \cup G_2 = G$
- $G_1 \cap G_2 = \emptyset$

Es seien $a, b \in G$ und G offen. Wähle $z_0 = a$ und $z_n = b$, sowie $z_j \in G$ für $j = 0, \dots, n$.
Es sei

$$\overline{z_k z_{k+1}} = \{z_k + t(z_{k+1} - z_k), 0 \leq t \leq 1\}$$

und

$$\Gamma_{ab}^\delta = \bigcup_{k=0}^{n-1} \overline{z_k z_{k+1}} \quad , \quad \delta = \{z_k\}_{k=0}^n$$

Definition I.6.3 Polygonaler Zusammenhang

Wir nennen eine offene Menge $G \subset \mathbb{C}$ mit $G \neq \emptyset$ **polygonal zusammenhängend** genau dann, wenn für alle $a, b \in G$ ein $\Gamma_{ab}^\delta \subset G$ existiert.

Aufgabe: Beweisen Sie, dass diese beiden Definitionen von Zusammenhang äquivalent sind.

Definition I.6.4 Gebiet

Eine nichtleere, offene und zusammenhängende Menge $G \subset \mathbb{C}$ nennen wir ein **Gebiet**.

Satz I.6.5

Sei G ein Gebiet und $f \in \mathcal{A}(G)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $f'(z) \equiv 0$
2. $\operatorname{Im} f(z) \equiv \operatorname{const}$
3. $\operatorname{Re} f(z) \equiv \operatorname{const}$
4. $|f(z)| \equiv \operatorname{const}$
5. $f(z) \equiv \operatorname{const}$

Beweis : Die Folgerungen 5) \Rightarrow 1), 2), 3), 4) sind offensichtlich.

2) \Rightarrow 1): Mit den Cauchy-Riemann-Gleichungen folgt $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ und $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ und damit $f'(z) = u'_x + iv'_x = 0$.

3) \Rightarrow 1): Dies folgt analog.

4) \Rightarrow 1): Dieser Schritt wird dem geeigneten Leser als Hausaufgabe überlassen.

1) \Rightarrow 5): Wegen $f'(z) = u'_x + iv'_x = v'_y - iu'_x = 0$ ist $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ Frechet-differenzierbar, wobei alle partiellen Ableitungen Null sind, also $u'_x = u'_y = v'_x = v'_y = 0$. Nun ist mit $z_k = (x_k, y_k)$:

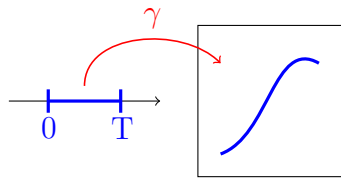
$$\left\| \begin{pmatrix} u(x_{k+1}, y_{k+1}) \\ v(x_{k+1}, y_{k+1}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u(x_k, y_k) \\ v(x_k, y_k) \end{pmatrix} \right\| \leq \sup_{z_k, z_{k+1}} \underbrace{\left\| \frac{D(u, v)}{D(x, y)} \right\|}_{=0} |z_{k+1} - z_k|$$

und damit $u(x_{k+1}, y_{k+1}) = u(x_k, y_k)$ und $v(x_{k+1}, y_{k+1}) = v(x_k, y_k)$ für $k = 0, \dots, n-1$.
Damit folgt

$$f(a) = f(z_0) = f(z_1) = \dots = f(z_{n-1}) = f(z_n) = f(b)$$

und der Beweis ist vollständig. □

I.7. Kurvenintegrale



Gegeben sei ein Intervall $[0, T]$ und ein Weg $\gamma: [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$, der stetig und injektiv sei (bis auf ggf. $\gamma(0) = \gamma(T)$). Es sei $\Gamma_\gamma = \{z = \gamma(t), t \in [0, T]\}$. Falls $\gamma \in C^1$ und $\gamma'(t) \neq 0$ gilt haben wir den Begriff der **Jordankurve**.

Es sei nun $\delta = \{t_k\}_{k=0}^n$ eine Zerlegung von $[0, T]$ mit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ und $\xi = \{\tau_k\}_{k=0}^{n-1}$ ein Satz von Stützstellen $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$ mit $k = 0, \dots, n-1$. Sowohl die Zerlegung als auch die Stützstellen werden natürlich auch unter γ entsprechend abgebildet. Es sei $z_k = \gamma(t_k)$ und $w_j = \gamma(\tau_j)$. Gegeben sei nun eine Funktion $f: \Gamma_\gamma \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} f(w_k)(z_{k+1} - z_k) &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\gamma(\tau_k))(\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)) \frac{t_{k+1} - t_k}{t_{k+1} - t_k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{f}(\tau_k) \frac{\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)}{t_{k+1} - t_k} \Delta t_k, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{f} = f \circ \gamma$ und $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ ist. Wir betrachten nun $\lambda(\delta) \rightarrow 0$ (wobei λ der Rang der Zerlegung, also die Länge des größten Teilstücks in der Zerlegung, ist). Dann können wir zum Integral übergehen:

$$\int_{\Gamma_\gamma} f(z) dz = \int_0^T (f \circ \gamma)(t) \gamma'(t) dt.$$

Aufgabe: Zeigen Sie, dass dieser Integralbegriff unabhängig von der Wahl der Parametrisierung der Kurve ist, solange die Richtung erhalten bleibt.

Eigenschaften:

- Das Kurvenintegral ist gerichtet:

$$\int_{\Gamma_{ab}} f(z) dz = - \int_{\Gamma_{ba}} f(z) dz$$

- Linearität des Kurvenintegrals:

$$\int_{\Gamma_{ab}} (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_{\Gamma_{ab}} f(z) dz + \beta \int_{\Gamma_{ab}} g(z) dz$$

Ein **gerichteter Pfad** ist eine Vereinigung von Jordankurven: $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n$, wobei diese Kurven zusammenhängen sollen und so orientiert sein sollen, dass auch Γ orientiert ist¹. Dann ist

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_k \int_{\Gamma_k} f(z) dz.$$

Beispiele:

1. Sei $f(z) = 1$, dann ist $\int_{\Gamma_{ab}} dz = b - a$.
2. Es sei Γ der (einfach durchlaufene) Einheitskreis in mathematisch positiver Richtung und $f(z) = z^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Wir parametrisieren den Kreis mit $\gamma(t) = e^{it}$, es ist also $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$. Da der Weg geschlossen ist schreiben wir \oint für das Integral und erhalten

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} z^n dz &= \int_0^{2\pi} e^{itn} \cdot i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)} dt \\ &= i \int_0^{2\pi} (\cos((n+1)t) + i \sin((n+1)t)) dt \\ &= \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases} \end{aligned}$$

3. Umläuft Γ einmal $|z| = 1$ im mathematisch positiven Sinne, so ist

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

Anmerkung zum Abschätzen von Kurvenintegralen:

Es leuchtet zunächst ein, dass eine folgende Abschätzung gilt:

$$\left| \int_{\Gamma_{ab}} f(z) dz \right| \leq \sup_{z \in \Gamma_{ab}} |f(z)| |b - a|$$

Diese Ungleichung ist jedoch **falsch**, wie obiges Beispiel bereits zeigte. Es ist hingegen

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(w_k)(z_{k+1} - z_k) \right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(w_k)| |z_{k+1} - z_k| \\ &\leq \sup_{\Gamma} |f(z)| \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|, \end{aligned}$$

womit für $\lambda(\delta) \rightarrow 0$ eine nun gültige Abschätzung folgt:

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \sup_{\Gamma} |f(z)| \cdot l(\Gamma),$$

wobei $l(\Gamma)$ die Länge des Weges Γ bezeichnet.

¹Beachte, dass diese Vereinigung nicht rein mengentheoretisch ist. Mit „zusammenhängen“ ist hierbei gemeint, dass Γ_{i+1} genau am Endpunkt von Γ_i ansetzt etc.

Satz I.7.1 Formel von Newton-Leibniz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f: G \rightarrow \mathbb{C}$, $a, b \in G$, sowie $\Gamma_{ab} \in G$ stückweise in C^1 . f sei für alle $z \in \Gamma_{ab}$ komplex differenzierbar und $f'|_{\Gamma_{ab}}$ sei stetig. Dann folgt

$$\int_{\Gamma_{ab}} f'(z) dz = f(b) - f(a).$$

Beweis : Γ_{ab} sei eine C^1 -Jordankurve. Dann ist mit der üblichen Darstellung $f = u + iv$:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{ab}} f'(z) dz &= \int_0^T (f' \circ \gamma)(t) \gamma'(t) dt = \int_0^T \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} dt \\ &= \int_0^T \left(\frac{d(u \circ \gamma)}{dt} + i \frac{d(v \circ \gamma)}{dt} \right) dt \\ &= \underbrace{u \circ \gamma \Big|_0^T}_{u(b) - u(a)} + i \underbrace{v \circ \gamma \Big|_0^T}_{v(b) - v(a)}, \end{aligned}$$

wobei $\gamma(0) = a$ und $\gamma(T) = b$ ist. Dann ist

$$= f(b) - f(a).$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Anmerkung: Sei $a = b$, das heißt Γ ist geschlossen. Dann folgt

$$\oint_{\Gamma} f'(z) dz = 0.$$

Beachte jedoch, dass wir hier mit der Voraussetzung der Existenz einer Stammfunktion arbeiten.

Frage: Warum gilt dann, wie oben gesehen für das Integral um den Einheitskreis

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i \quad ?$$

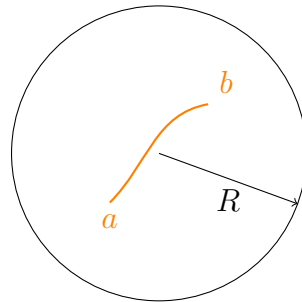
Hier ist $f'(z) = \frac{1}{z}$. Wir wollen $f(z) = \text{Ln } z$ versuchen, müssen uns, da dies eine mehrdeutige Abbildung ist, aber für einen Zweig entscheiden. Wir haben aber bereits gesehen, dass wir den Logarithmus auf dieser Kurve nicht als differenzierbare Funktion erhalten können, da der Schnitt für die Riemannblätter bei jeder Wahl des Schnitts die Kurve Γ schneidet. Es ist also nicht möglich, einen auf *ganz* Γ differenzierbaren Zweig von $\text{Ln } z$ anzugeben.

Beispiel: Sei $p(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_nz^n$ ein Polynom. Ist $p(z) = q'(z)$, so ist $q(z) = c_0z + \frac{c_1z^2}{2} + \dots + \frac{c_nz^{n+1}}{n+1}$. Dann folgt

$$\int_{\Gamma_{ab}} p(z) dz = q(b) - q(a).$$

Insbesondere folgt für $a = b$ damit $\oint_{\Gamma} p(z) dz = 0$.

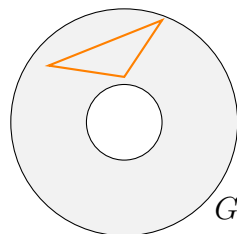
Beispiel: Sei nun $p(z) = c_0 \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ und $R > 0$ der Konvergenzradius dieser Reihe. Mit $p(z) = q'(z)$ folgt dann $q(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{k-1}}{k} z^k$, wobei der Konvergenzradius erhalten bleibt. Für einen Pfad, der vollständig in diesem Kreis bleibt:



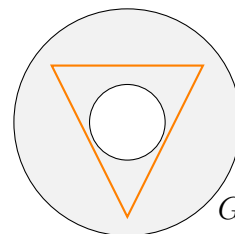
Also einen Weg $\Gamma = \Gamma_{ab}$, für den $\Gamma \subset U_R = \{|z| < R\}$ gilt. Dann folgt auch hier, dass wir den Satz von Newton-Leibniz anwenden können.

1.8. Der Integralsatz von Cauchy

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\Delta \subset G$ und zwar so, dass sowohl Rand als auch Inneres von Δ in G liegen. Folgende Grafik soll dies veranschaulichen:



Zulässig



Nicht zulässig

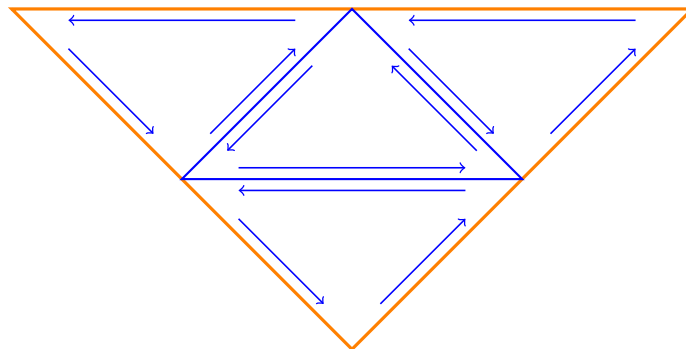
Satz I.8.1 Integralsatz von Cauchy

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und Δ wie oben beschrieben. Ferner sei $f \in \mathcal{A}(G)$ und $\Gamma = \partial\Delta$. Dann folgt

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Beachte: Wir setzen zwar Differenzierbarkeit voraus, keineswegs aber die Existenz einer Stammfunktion. Dies unterscheidet diesen Satz von unseren bisherigen Ergebnissen.

Beweis : Sei $I = \oint_{\Gamma} f(z) dz \neq 0$. Dann folgt $|I| > 0$. Sei nun $\Delta = \Delta^{(0)}$ das Dreieck der 0-ten Generation, analog $\Gamma = \Gamma^{(0)}$ und $\Gamma_j^{(1)} = \partial\Delta_j^{(1)}$. Wir halbieren die Seiten und erhalten so vier Teildreiecke $\Delta_j^{(1)}$ ($j = 1, \dots, 4$). Diese Dreiecke orientieren wir zudem so, dass sich die Integrale an den angrenzenden Kanten aufheben:



Es ist also

$$I = \oint_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^4 \oint_{\Gamma_j^{(1)}} f(z) dz.$$

Dann gibt es mindestens ein j mit der Eigenschaft

$$\left| \oint_{\Gamma_j^{(1)}} f(z) dz \right| \geq \frac{I}{4} > 0.$$

Nun führen wir diese Zerlegung ein weiteres Mal für $\Delta_j^{(1)}$ mit $j = j^{(1)}$ durch (alle anderen Begriffe analog). Dann erhalten wir eine geschachtelte Folge von Dreiecken $\Delta_{j_l}^{(l)} \subset \Delta_{j_{l-1}}^{(l-1)} \subset \dots \subset \Delta_{j_1}^{(1)} \subset \Delta^{(0)}$ mit

$$\left| \oint_{\partial\Delta_{j_l}^{(l)}} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4^l} |I| > 0.$$

Die Länge des Randes beträgt dabei $|\partial\Delta_{j_l}^{(l)}| = 2^{-l} |\partial\Delta|$. Der Durchmesser (also der größte Abstand zweier Punkte des Dreiecks) berechnet sich zu $D(\Delta_{j_l}^{(l)}) = 2^{-l} D(\Delta)$. Ferner wissen wir, dass es ein $z_0 \in \bigcap_{l \in \mathbb{N}} \Delta_{j_l}^{(l)}$ gibt, da \mathbb{C} vollständig ist. Dann ist

$$I^{(l)} = \oint_{\partial\Delta_{j_l}^{(l)}} f(z) dz = \underbrace{\oint_{\partial\Delta_{j_l}^{(l)}} f(z_0) dz}_{=0} + \oint_{\partial\Delta_{j_l}^{(l)}} (f(z) - f(z_0)) dz,$$

der erste Summand ist dabei Null, da wir eine Konstante auf einem geschlossenen Pfad integrieren. Nun ist

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) &= f'(z_0)(z - z_0) + r(z; z_0) \\ r(z; z_0) &= o(|z - z_0|) \quad \text{für } z \rightarrow z_0. \end{aligned}$$

Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$I^{(l)} = \dots = 0 + \underbrace{\oint_{\partial\Delta_{j_l}^{(l)}} f'(z_0)(z - z_0) dz}_{=0} + \oint_{\partial\Delta_{j_l}^{(l)}} r(z; z_0) dz,$$

wobei der Summand nun verschwindet, da wir ein Polynom über einen geschlossenen Pfad integrieren. Bedenke nun, dass $r(z; z_0) = o(|z - z_0|)$ gerade folgendes bedeutet:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \forall z: |z - z_0| < \delta(\varepsilon) \quad |r(z; z_0)| < \varepsilon |z - z_0|.$$

Damit folgt also durch Anwendung der Dreiecksungleichung:

$$\left| \oint_{\partial\Delta_{j_l}^{(l)}} r(z; z_0) dz \right| \leq \left| \partial\Delta_{j_l}^{(l)} \right| \sup_{z \in \Delta_{j_l}^{(l)}} |r(z; z_0)|.$$

Fixiere nun ein genügend kleines $\varepsilon > 0$. Wegen $\delta(\varepsilon) > 0$ können wir ein l wählen, so dass $D(\Delta_{j_l}^{(l)}) < \delta(\varepsilon)$ gilt. Dann folgt

$$\begin{aligned} |I^{(l)}| &\leq \left| \partial\Delta_{j_l}^{(l)} \right| \cdot \varepsilon \cdot D(\Delta_{j_l}^{(l)}) \\ &\leq 2^{-l} |\partial\Delta| \cdot \varepsilon \cdot 2^{-l} D(\Delta). \end{aligned}$$

Wir hatten aber auch $|I^{(l)}| \geq \frac{1}{4^l} |I|$ gesehen. Insgesamt ist also

$$\frac{1}{4^l} |I| \leq |I^{(l)}| \leq \frac{1}{4^l} |\partial\Delta| D(\Delta) \varepsilon.$$

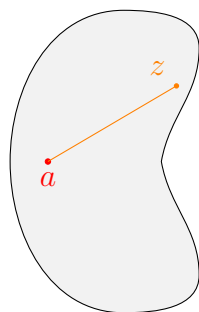
Falls nun $|\partial\Delta| D(\Delta) \varepsilon < |I|$ ist, so haben wir einen Widerspruch und sind fertig. Da wir ε ursprünglich beliebig klein wählen konnten ist dies der Fall. \square

Zur Existenz von Stammfunktionen in sternförmigen Gebieten

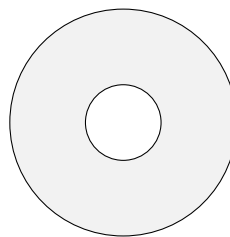
Ein **sternförmiges Gebiet** ist ein Gebiet, in welchem es einen Punkt gibt, so dass die Verbindung zu allen anderen Punkten des Gebiets vollständig im Gebiet liegt. Anschaulich gibt es also einen bestimmten Punkt, von welchem man aus den Überblick über das gesamte Gebiet hat.

„Die Universität ist nicht unbedingt ein sternförmiges Gebiet .. von wegen Überblick und so“ - Timo Weidl.

Wir nennen einen solchen Punkt a einen **zentralen Punkt**. In folgender Grafik ist links ein sternförmiges und rechts ein nicht-sternförmiges Gebiet dargestellt:



sternförmig



nicht sternförmig

Dabei kann man sich natürlich auch wesentlich komplexere Beispiele überlegen.

„Hausaufgabe: Vervollständigen Sie das Bild und malen Sie die Lakritzstange aus“ - Timo Weidl.

Satz I.8.2

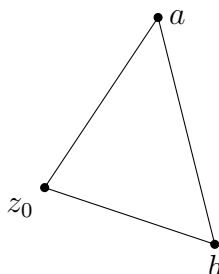
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet und $f \in \mathcal{A}(G)$. Dann folgt

$$F(z) = \int_{\overline{az}} f(w) dw \in \mathcal{A}(G).$$

Ferner gilt dann $F'(z) = f(z)$.

Kurz: In sternförmigen Gebieten besitzen holomorphe Funktionen also eine (nicht unbedingt eindeutige) Stammfunktion.

Beweis : Betrachte ein $z_0 \in G$. Da G offen ist gibt es eine Umgebung $U_\varepsilon(z_0) \subset G$ (mit $\varepsilon > 0$). Betrachte $z \in U_\varepsilon(z_0)$. Dadurch erhalten wir ein Dreieck Δ :



Da G sternförmig ist folgt $\Delta \subset G$. Mit

$$\left(\int_{\overline{az_0}} + \int_{\overline{z_0z}} + \int_{\overline{za}} \right) f(w) \, dw = \int_{\partial\Delta} f(w) \, dw$$

folgt nach dem Satz von Cauchy (für Dreiecke) dann $\oint_{\partial\Delta} f(w) \, dw = 0$. Damit ist $0 = F(z_0) - F(z) + \int_{\overline{z_0z}} f(w) \, dw$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} &= \frac{1}{z - z_0} \int_{\overline{z_0z}} f(w) \, dw \\ &= \underbrace{\frac{1}{z - z_0} \int_{\overline{z_0z}} f(z_0) \, dw}_{=f(z_0)} + \underbrace{\frac{1}{z - z_0} \int_{\overline{z_0z}} (f(w) - f(z_0)) \, dw}_{=R(f,z,z_0)}. \end{aligned}$$

Wenn wir $R(f, z, z_0) \rightarrow 0$ für $z \rightarrow z_0$ zeigen können, so folgt, dass es ein $F' \Big|_{z=z_0} = f(z_0)$ gibt. Es ist nun

$$\begin{aligned} |R(f, z, z_0)| &\leq \frac{1}{|z - z_0|} \left| \int_{\overline{z_0z}} (f(w) - f(z_0)) \, dw \right| \\ &\leq \frac{1}{|z - z_0|} \cdot |z - z_0| \sup_{w \in \overline{z_0z}} |f(w) - f(z_0)|, \end{aligned}$$

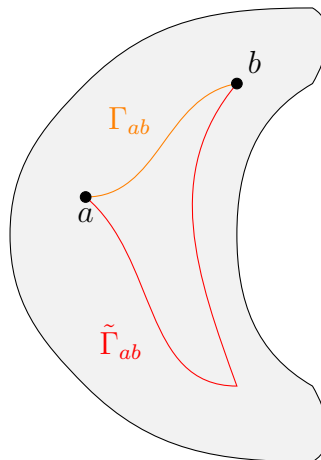
und da f stetig ist gilt $|f(w) - f(z_0)| < \varepsilon$ für $|w - z_0| \leq |z - z_0| < \delta(\varepsilon)$. Dann ist

$$|R(f, z, z_0)| < \varepsilon$$

für $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$. Damit sind wir fertig. □

Zusammenfassung:

1. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{A}(G)$. Es existiere ferner ein $F \in \mathcal{A}(G)$ mit $F' = f$, sowie zwei verschiedene Wege Γ_{ab} und $\tilde{\Gamma}_{ab}$ mit $\int_{\Gamma_{ab}} f(z) \, dz = \int_{\tilde{\Gamma}_{ab}} f(z) \, dz$.



Falls Γ geschlossen ist, so folgt $\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$. Damit ist dann

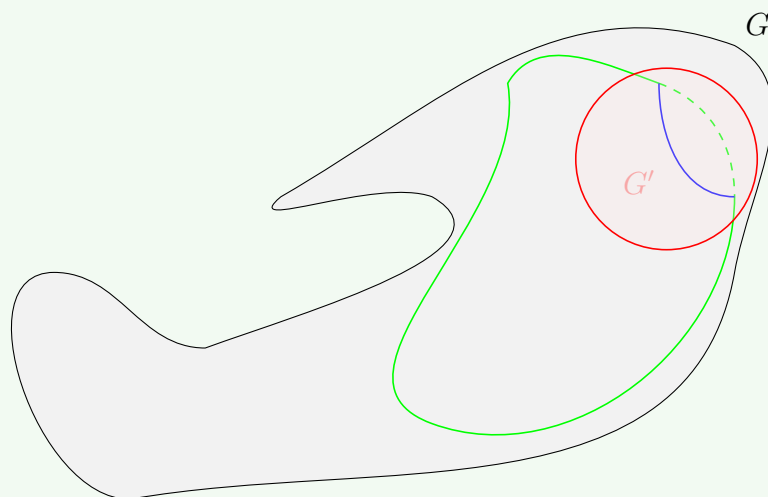
$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_{ab}} f(z) dz - \int_{\tilde{\Gamma}_{ab}} f(z) dz = 0.$$

Sobald eine Stammfunktion existiert ist das Integral über geschlossene Pfade also Null.

2. Sei $G \subset \mathbb{C}$ sternförmig und $f \in \mathcal{A}(G)$. Dann existiert ein $F \in \mathcal{A}(G)$ mit $F' = f$. Dann gelten die beiden Formeln aus 1) für alle $f \in \mathcal{A}(G)$ in sternförmigen Gebieten.

Definition I.8.3 Elementare Deformation eines Pfades

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $G' \subset G$ sei sternförmig. Einen Pfad in G können wir dann innerhalb von G' deformieren (d.h. ein Teilstück „ersetzen“). Dies nennen wir eine **elementare Deformation**.



Wichtig: Das Pfadintegral bleibt für $f \in \mathcal{A}(G)$ bei elementaren Deformationen des Pfades erhalten (Satz von Cauchy).

Definition I.8.4 Homotopie

Zwei Pfade $\Gamma \subset G$ und $\Gamma' \subset G$ sind in G **homotop**, wenn Γ' durch eine endliche Anzahl von elementaren Deformationen aus Γ erzeugt werden kann. Bei nicht-geschlossenen Pfaden müssen dabei Anfangs- und Endpunkt erhalten werden.

Satz I.8.5 Satz von Cauchy

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{A}(G)$, sowie Γ, Γ' in G homotope Pfade. Dann folgt

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma'} f(z) dz.$$

Bemerkung: Einen einzelnen Punkt bezeichnen wir als **Nullpfad**. Ist Γ homotop zum Nullpfad, so folgt $\int_{\Gamma} f dz = 0$.

Definition I.8.6 Einfach zusammenhängend

Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ heißt **einfach zusammenhängend**, falls *jeder* geschlossene Pfad Γ in G homotop zum Nullpfad ist.

Anschaulich: Ein einfach zusammenhängendes Gebiet enthält keine Löcher.

Satz I.8.7

Sei das Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend. Dann ist für jedes $f \in \mathcal{A}(G)$ und für jeden geschlossenen Pfad $\Gamma \subset G$

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Zudem ist für $a \in G$

$$F(z) = \int_{\Gamma_{az}} f(w) dw$$

eine Stammfunktion von f .

Beweis : Der Beweis verläuft analog zum Satz für sternförmige Gebiete. □

Satz I.8.8 Umkehrung

Wenn jedes $f \in \mathcal{A}(G)$ eine Stammfunktion besitzt, so ist G einfach zusammenhängend.

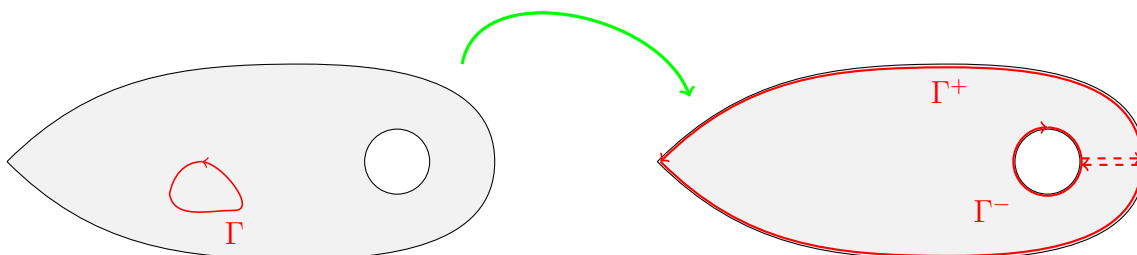
Beweis : Ist G nicht einfach zusammenhängend, so gibt es einen nicht zum Nullpfad homotopen geschlossenen Pfad. Dann gibt es innerhalb des Pfades ein Punkt $w \notin G$. Dann ist aber $\frac{1}{z-w} \in \mathcal{A}(G)$. Da der Pfad homotop zu einem Kreis ist, muss dann aber

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z-w} = 2\pi i$$

sein. Da das Integral über einen geschlossenen Pfad nicht Null ist, kann $\frac{1}{z-w}$ keine Stammfunktion besitzen. Dies ist ein Widerspruch. \square

Weitere Modifikationen:

Wir wollen uns die Frage stellen, wie wir unsere Theorie modifizieren können, wenn G Löcher enthält (also nicht mehr einfach zusammenhängend ist). Deformiert man einen geschlossenen Pfad, für den $\oint_{\Gamma} f dz = 0$ (für alle $f \in \mathcal{A}(G)$) gilt, so, dass er das ganze Gebiet ausfüllt und das Loch umläuft:



Man erhält dann

$$\oint_{\Gamma^+} f(z) dz + \oint_{\Gamma^-} f(z) dz = 0,$$

wobei Γ^+ der Pfad entlang des Randes des Gebietes ist und Γ^- der Pfad entlang des Randes des Loches (diese beiden Pfade haben entgegengesetzte Orientierung). Verallgemeinert man dies auf mehrere Löcher, so erhält man

$$\oint_{\Gamma^+} f(z) dz + \sum_{j=1}^k \oint_{\Gamma_j^-} f(z) dz = 0$$

für jedes $f \in \mathcal{A}(G)$.

Definition I.8.9 Windungszahl

Wir bezeichnen mit

$$n(\Gamma, w) := \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z - w}$$

die **Windungszahl** des Pfades Γ um den Punkt w . Sie gibt also an, wie oft der Pfad diesen Punkt umläuft.

Beachte: Die Orientierung ist hierbei entscheidend. Zwei Umläufe in entgegengesetzter Richtung ergeben eine Windungszahl von 0.

Wir wollen den Satz von Cauchy, den wir nun in verschiedenen Formen kennengelernt haben, nochmals genauer betrachten:

Satz I.8.10 Satz von Cauchy

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{A}(G)$. Ferner sei Γ ein geschlossener Pfad und es gelte $n(\Gamma, w) = 0$ für alle $w \notin G$. Dann gilt

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Zusammenfassung: Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

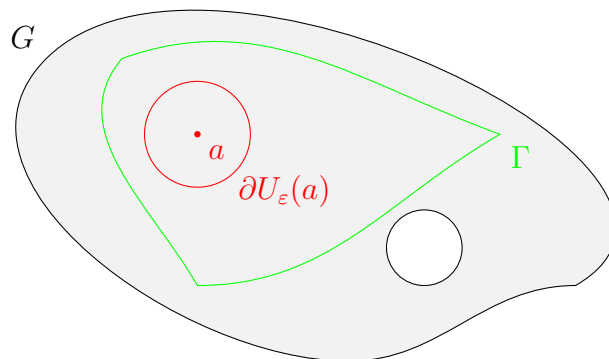
1. G ist einfach zusammenhängend (d.h. keine Löcher).
2. $n(\Gamma, w) = 0$ für alle geschlossenen Pfade Γ und für alle $w \notin G$.
3. $\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$ für alle geschlossenen Pfade Γ und für alle $f \in \mathcal{A}(G)$.
4. Für alle $f \in \mathcal{A}(G)$ existiert eine Stammfunktion $F \in \mathcal{A}(G)$, d.h. es gilt $F'(z) = f(z)$.
5. Für alle $f \in \mathcal{A}(G)$ mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$ (d.h. f verschwindet nirgends) existiert eine Funktion $g \in \mathcal{A}(G)$ mit $e^g = f$.

I.9. Die Formel von Cauchy

„Sie merken jetzt, dass wir Integrale lösen, indem wir uns Bilder anschauen.“

- Timo Weidl

Folgende Grafik dient zur Veranschaulichung des nächsten Satzes:



Satz I.9.1

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und a ein Punkt mit $\overline{U_\varepsilon(a)} \subset G$ für ein $\varepsilon > 0$. Ferner sei Γ in $G \setminus \{a\}$ homotop zum einfachen Umlauf in mathematisch positiver Richtung von $\partial U_\varepsilon(a)$ und $f \in \mathcal{A}(G)$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz = f(a).$$

Beweis : Es gilt $\frac{f(z)}{z-a} \in \mathcal{A}(G \setminus \{a\})$, wie man sich leicht überlegen kann. Damit folgt

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz = \oint_{\partial U_\varepsilon(a)} \frac{f(z)}{z - a} dz,$$

da dies homotope Pfade sind. Zudem halten wir fest, dass wir ε beliebig klein machen können. Dann ist

$$= \underbrace{\oint_{\partial U_\varepsilon(a)} \frac{f(a)}{z - a} dz}_{=2\pi i f(a)} + \underbrace{\oint_{\partial U_\varepsilon(a)} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz}_{=:J}.$$

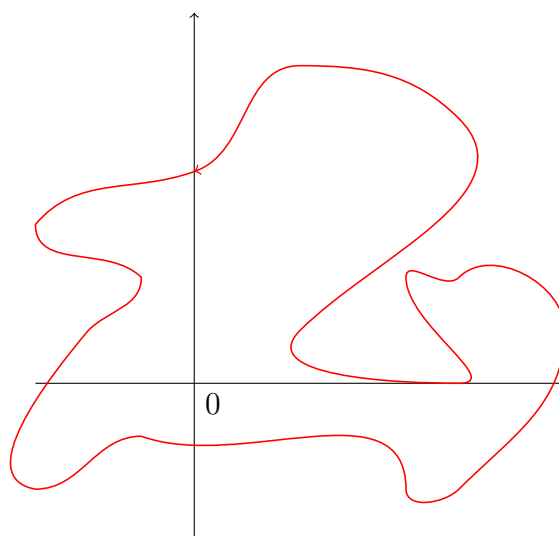
Wir wollen dieses J nun abschätzen. Es gilt mit der kanonischen Abschätzung

$$|J| \leq \sup_{z \in \partial U_\varepsilon(a)} \frac{|f(z) - f(a)|}{\underbrace{|z - a|}_{=\varepsilon}} \cdot \underbrace{l(\partial U_\varepsilon(a))}_{=2\pi\varepsilon} \leq 2\pi \sup_{z \in \partial U_\varepsilon(a)} |f(z) - f(a)|$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Damit folgt $J = 0$ und wir sind fertig. □

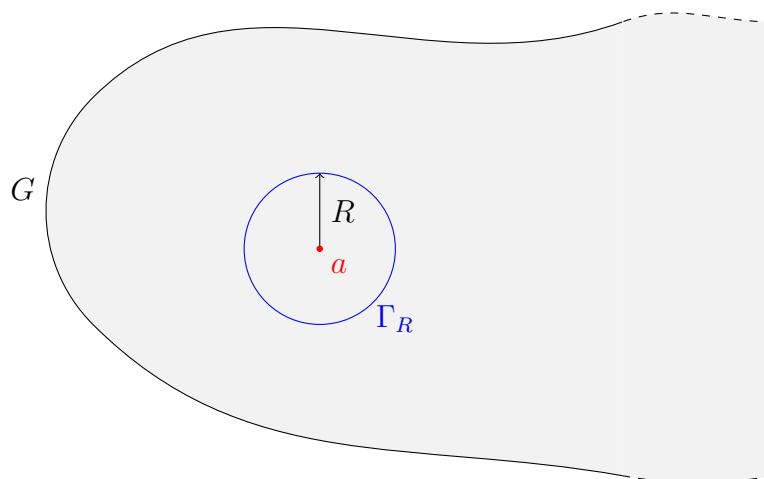
Beispiel:



Wir wollen für diesen Pfad $\oint_{\Gamma} \frac{\cos z}{z} dz$ berechnen. Wir erkennen $a = 0$ und die Tatsache, dass alle Voraussetzungen erfüllt sind und es folgt

$$\oint_{\Gamma} \frac{\cos z}{z} dz = 2\pi i \cos 0 = 2\pi i.$$

Spezialfall: Wir schauen uns folgende Situation mit einem kreisförmigen Pfad an:



Dann können wir folgenden Satz formulieren:

Satz I.9.2 Mittelwertsatz

Es sei $f \in \mathcal{A}(G)$ und obige Situation gegeben. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + Re^{i\vartheta}) \, d\vartheta = f(a).$$

Der Wert von $f(a)$ ist also gewissermaßen das arithmetische Mittel von den Werten von f um einen Kreis um a .

Beweis : Mit der Formel von Cauchy ist

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{z - a} \, dz$$

und mit $z = a + Re^{i\vartheta}$ für $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ folgt

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + Re^{i\vartheta})}{Re^{i\vartheta}} \cdot iRe^{i\vartheta} \, d\vartheta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + Re^{i\vartheta}) \, d\vartheta. \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis vollständig. □

Definition I.9.3 analytische Funktion

f heißt **analytisch** im Punkt $a \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass f als

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k$$

darstellbar ist und dies für $|z - a| < \varepsilon$ konvergiert.

Folgerung: Für den Konvergenzradius R gilt $0 < \varepsilon \leq R$ und man kann für $|z - a| < \varepsilon$ gliedweise differenzieren, was uns die Formel

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

liefert. Ferner kann man sie sogar beliebig oft differenzieren.

Satz I.9.4

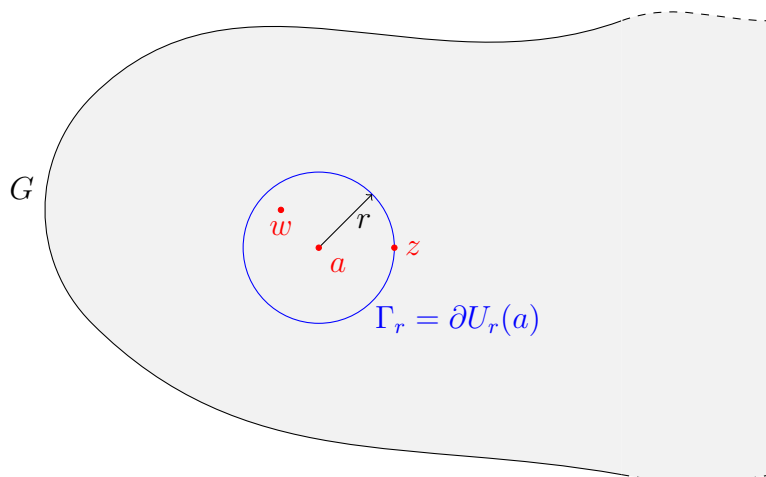
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und für $a \in G$ sei $R_a = \text{dist}(a, \partial G)$ (dann gilt $U_{R_a}(a) \subset G$). Dann ist $f \in \mathcal{A}(G)$ genau dann, wenn f in allen $a \in G$ analytisch ist. Wir haben dann also eine Darstellung $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(a)(z-a)^k$ und es gilt, dass der Konvergenzradius dieser Potenzreihe $\geq R_a$ ist. Ferner gilt dann für die Koeffizienten

$$c_k(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U_r(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz,$$

wobei $0 < r < R_a$ ist.

Folgerung: Ist $f \in \mathcal{A}(G)$, so ist f beliebig oft komplex differenzierbar (Satz von Goursat).

Beweis : Die Richtung „ \Leftarrow “ ist eine Aussage, die bereits in Analysis II gezeigt wurde. Wir zeigen also „ \Rightarrow “. Betrachte hierfür $\overline{U_r(a)} \subset G$.



Dann ist nach der Formel von Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_r} \frac{f(z)}{z-w} dz = f(w).$$

Wir schreiben nun

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{(z-a) - (w-a)} = \frac{1}{(z-a) \underbrace{\left(1 - \frac{w-a}{z-a}\right)}_{=:q}},$$

dann folgt $|q| < 1$. Dann ist $\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ und es folgt

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{w-a}{z-a} \right)^k,$$

wobei diese Reihe für festes w nach dem Majorantenkriterium gleichmäßig bezüglich $z \in \Gamma_r$ konvergiert. Dann folgt mit dem Vertauschungssatz für Reihen und Integrale

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_r} \frac{f(z)}{z-a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{w-a}{z-a} \right)^k dz \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (w-a)^k \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_r} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz}_{=: c_k(a)}. \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis vollständig. □

Hinweis: Gilt $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c'_k z^k$ für $|z| < \varepsilon$ mit einem $\varepsilon > 0$, dann folgt $c_k = c'_k$ für $k = 0, 1, \dots$

[Vorlesung vom 20.05.2011 wird noch nachgetragen]

I.10. Nullstellen analytischer Funktionen

Sei G ein Gebiet und $f \in \mathcal{A}(G)$. Wir setzen $Z(f) = \{z \in G \mid f(z) = 0\}$ für die Menge der Nullstellen.

Definition I.10.1 Ordnung

Eine Zahl $a \in Z(f)$ besitzt die (endliche) Ordnung $m \in \mathbb{N}$, falls

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(m-1)}(a) = 0$$

und $f^{(m)}(a) \neq 0$.

Lemma I.10.2

Es sei $f \in \mathcal{A}(U_r(a))$ für ein $r > 0$ und f habe die Darstellung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k, \quad z \in U_r(a).$$

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. a ist eine Nullstelle der Ordnung m .
2. $f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k (z-a)^k$ und $c_m \neq 0$.
3. $f(z) = (z-a)^m g(z)$ mit $g \in \mathcal{A}(U_r(a))$ und $g(a) \neq 0$.
4. Es existiert der Grenzwert $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^{-m} f(z) \neq 0$.

Beweis : Die Äquivalenz $1) \Leftrightarrow 2)$ folgt durch Ableiten der Potenzreihe und der Taylor-schen Formel.

Für $2) \Rightarrow 3)$ betrachte $f(z) = (z-a)^m \sum_{l=0}^{\infty} c_{m+l} (z-a)^l$. Mit der Formel von Hadamard folgt, dass die Reihe mindestens in $U_r(a)$ konvergiert.

Für $3) \Rightarrow 1)$ differenziere $f(z) = (z-a)^m g(z)$ mit der Produktregel.

Die Richtung $2) \Rightarrow 4)$ lässt sich analog zu $2) \Rightarrow 3)$ beweisen.

Die Richtung von $4)$ zu einer der anderen Aussage bleibt zur Übung überlassen. \square

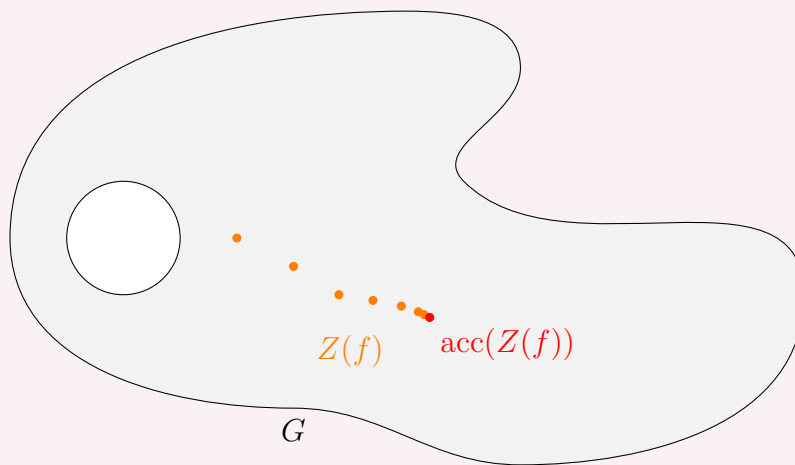
Folgerung: Sei $f \in \mathcal{A}(U_r(a))$ und $a \in Z(f)$. Dann ist entweder a eine Nullstelle endlicher Ordnung oder $f(z) \equiv 0$ für $z \in U_r(a)$.

Folgerung: Sei $f \in \mathcal{A}(U_r(a))$ und $a \in Z(f)$. Dann ist a eine isolierte Nullstelle genau dann, wenn a eine Nullstelle endlicher Ordnung ist. Eine Nullstelle heißt hierbei isoliert,

wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $f(z) \neq 0$ für alle $z \in U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ ist. Die Richtung „ \Rightarrow “ folgt hierbei aus der vorherigen Folgerung, die Richtung „ \Leftarrow “ folgt aus der Eigenschaft 3) des Lemmas. Demnach gilt $f(z) = (z - a)^m g(z)$. Dann gilt $f(z) = 0$ aber nur, wenn $(z - a)^m = 0$, also $z = a$, oder $g(z) = 0$ ist. Wir wissen aber, dass $g(a) \neq 0$ ist und wegen $g \in \mathcal{A}(U_r(a))$ ist g auch stetig. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $g(z) \neq 0$ für $z \in U_\varepsilon(a)$ und damit ist a eine isolierte Nullstelle.

Satz I.10.3 Identitätssatz

Es sei G ein Gebiet (insbesondere ist G also zusammenhängend), $f \in \mathcal{A}(G)$ und es gelte $\text{acc}(Z(f)) \cap G \neq \emptyset$. Dann folgt $f(z) \equiv 0$ für $z \in G$.



Beweis : Es sei $E = \text{acc}(Z(f)) \cap G \neq \emptyset$. Unsere Strategie ist es, zu zeigen, dass sowohl E als auch $G \setminus E$ offen ist. Dann zerfällt $G = E \cup (G \setminus E)$ in zwei disjunkte, offene Teilmengen. Da G aber zusammenhängend ist *muss* eine dieser Teilmengen leer sein. Nach Voraussetzung ist E jedoch nicht leer und es muss $G \setminus E = \emptyset$ und damit $G = E$ sein. Dann ist jeder Punkt $z \in G$ ein Häufungspunkt von Nullstellen $z_j \rightarrow z$. Da f stetig ist folgt dann aber $f(z) = \lim_{j \rightarrow \infty} f(z_j) = 0$. Dann ist $z \in Z(f)$ und damit $G = Z(f)$.

Nun haben wir so viel kassiert, dass es an der Zeit ist, unsere Schulden zu begleichen:

1. Offenheit von E : Es sei $a \in E$, d.h. es gibt eine Folge von Nullstellen $z_j \rightarrow a$. Dann ist $f(a) = \lim_{j \rightarrow \infty} f(z_j) = 0$ wegen der Stetigkeit von f . a ist also eine Nullstelle, die wegen $f(z_j) = 0$ und $z_j \rightarrow a$ aber nicht isoliert ist. Damit ist $f(z) \equiv 0$ für $z \in U_\varepsilon(a)$ bzw. $U_\varepsilon(a) \subset \text{acc}(Z(f))$. Damit ist $U_\varepsilon(a) \subset E = \text{acc}(Z(f)) \cap G$ und damit ist E offen.
2. Offenheit von $G \setminus E$: Es sei $a \in G \setminus E$, d.h. entweder ist a keine Nullstelle oder a ist eine isolierte Nullstelle.

- a) Sei a keine Nullstelle. Dann ist $f(z) \neq 0$ für $|z - a| < \varepsilon$ und damit $U_\varepsilon(a) \cap \text{acc}(Z(f)) = \emptyset$. Dann ist $U_\varepsilon(a) \subset G \setminus E$.
- b) Sei a eine isolierte Nullstelle (und damit endlicher Ordnung). Dann ist $f(z) \neq 0$ für $|z - a| < \varepsilon$ und $z \neq a$. Dann ist $U_\varepsilon(a) \cap \text{acc}(Z(f)) = \emptyset$ und damit wieder $U_\varepsilon(a) \subset G \setminus E$.

Damit ist $G \setminus E$ also offen. □

Folgerung: Sei G ein Gebiet und $f, g \in \mathcal{A}(G)$. Ferner existiere eine Menge $M \subset G$ mit $f|_M = g|_M$ und $\text{acc}(M) \cap G \neq \emptyset$. Dann folgt $f(z) = g(z)$ für alle $z \in G$.

Für den Beweis betrachte $f - g =: h \in \mathcal{A}(G)$. Es ist $M \subset Z(h)$ und es gilt $\text{acc}(M) \subset \text{acc}(Z(h))$. Dann ist $\text{acc}(Z(h)) \cap G \neq \emptyset$ und damit $h \equiv 0$ auf G .

Fun Fact: Aus dieser Tatsache folgt, dass es nur eine analytische Funktion in \mathbb{C} gibt, die auf \mathbb{R} der Sinusfunktion entspricht.

Definition I.10.4 Analytische Fortsetzung

Es seien G und \tilde{G} zwei Gebiete mit $G \subset \tilde{G}$. Ferner seien $f \in \mathcal{A}(G)$ und $\tilde{f} \in \mathcal{A}(\tilde{G})$.

Wir nennen \tilde{f} eine **analytische Fortsetzung** von f , falls $\tilde{f}|_G = f|_G$ gilt.

Anmerkung: Falls zu gegebenen G , f und \tilde{G} eine analytische Fortsetzung \tilde{f} von f auf \tilde{G} existiert, so ist diese eindeutig bestimmt.

Für den Beweis nehmen wir an, \tilde{f} und $\tilde{\tilde{f}}$ seien zwei analytische Fortsetzungen auf \tilde{G} . Dann gilt für $h := \tilde{f} - \tilde{\tilde{f}}$ gerade $h(z) = 0$ für $z \in G$. Dann ist $G \subset Z(h)$ und G offen und damit $G \subset \text{acc}(Z(h))$. Nach einer obigen Folgerung ist dann $h \equiv 0$ auf \tilde{G} .

Beispiel: Riemannsche Zetafunktion

Es sei $\zeta(z) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^z}$ mit $\text{Re } z > 1$ die Riemannsche Zetafunktion. Es lässt sich zeigen, dass diese Funktion dort absolut konvergiert und holomorph ist. Die Frage ist nun, ob sich ζ auch außerhalb dieses Gebietes derartig fortsetzen lässt, dass diese Eigenschaften erhalten bleiben.

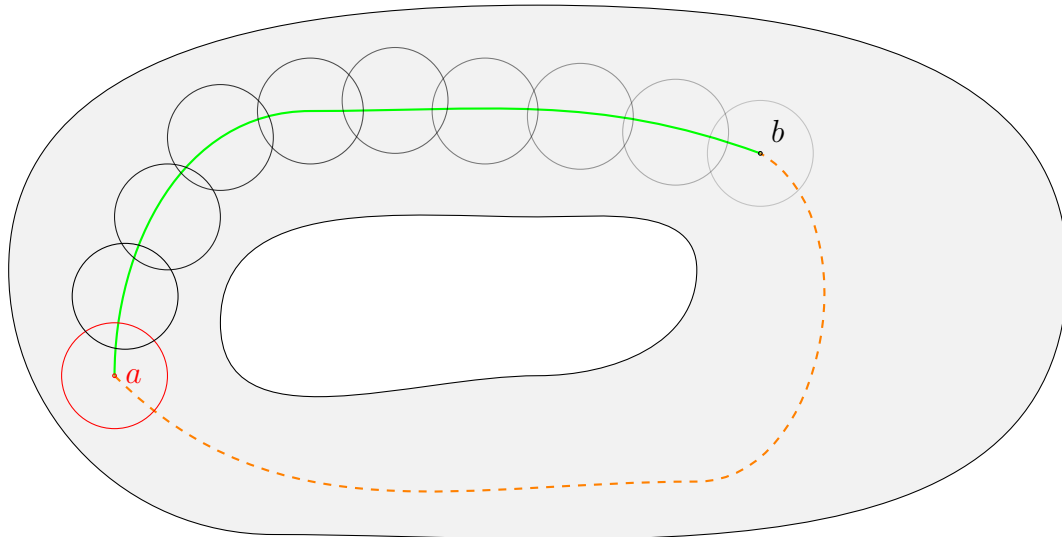
Wir wissen nun: *Falls* es eine solche analytische Fortsetzung gibt, so ist sie eindeutig. Erst durch diese Tatsache ist die Riemannhypothese (alle nichttrivialen Nullstellen s erfüllen $\text{Re } s = \frac{1}{2}$) gewissermaßen „sinnvoll“, da sie von der Fortsetzung abhängt.

Zudem hängt die Riemannsche Zetafunktion bzw. die Riemannhypothese sehr stark mit der Zahlentheorie und der Verteilung von Primzahlen zusammen.

Beispiel: Es sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$ mit $|z| < 1$ und $G = \{|z| < 1\}$. Dann lässt sich f für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ durch $\tilde{f} = \frac{1}{1-z}$ analytisch fortsetzen. Dies ist auch die maximale

Fortsetzung, diese Singularität können wir also nicht loswerden. Wollen wir nun \tilde{f} am Punkt a in eine Potenzreihe entwickeln, so konvergiert dieser gerade in dem Kreis um a , der die 1 berührt. Größer kann der Konvergenzradius nicht sein, da in 1 die besagte Singularität liegt.

Diese Idee können wir auch verallgemeinern und erhalten dabei eine Methode, die man „analytische Fortsetzung entlang eines Pfades“ nennt:



Die Frage ist nun, ob diese Fortsetzung abhängig vom konkreten Pfad abhängt. Die Antwort hierauf ist i.A. „Nein“, die analytische Fortsetzung ist jedoch zumindest homotopieinvariant.

I.11. Das Maximumsprinzip

Das Maximumsprinzip auf einem Kreis

Es sei $U_R(a) = \{z : |z - a| < R\}$ mit $R > 0$, sowie $f \in \mathcal{A}(U_R(a))$. Gilt zudem $|f(a)| \geq |f(z)|$ für alle $z \in U_R(a)$, so folgt $f(z) \equiv f(a)$ für alle $z \in U_R(a)$.

Beweis : Es sei $0 < r < R$. Mit dem Mittelwertsatz folgt

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U_r(a)} \frac{f(z)}{z - a} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\vartheta}) d\vartheta.$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} |f(a)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\vartheta})| \, d\vartheta \\ &\stackrel{\text{n.v.}}{\leq} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a)| \, d\vartheta \\ &= |f(a)|. \end{aligned}$$

Daraus folgt

1. $|f(a)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\vartheta})| \, d\vartheta$ und
2. $|f(a)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a)| \, d\vartheta$.

Subtrahieren dieser Gleichungen liefert

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\left(|f(a)| - |f(a + re^{i\vartheta})| \right)}_{\geq 0} \, d\vartheta.$$

Damit erhalten wir $|f(a)| \equiv |f(a + re^{i\vartheta})| = |f(z)|$ für alle $z \in U_R(a)$. Da $f \in \mathcal{A}(U_R(a))$ gilt und wie gesehen auch $|f| \equiv \text{const}$ ist folgt aus den Cauchy-Riemann-Gleichungen, dass $f(z) \equiv \text{const} \equiv f(a)$ gilt. \square

Das Maximumsprinzip in allgemeinen Gebieten

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, $f: \overline{G} = G \cup \partial G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $f|_G \in \mathcal{A}(G)$. Dann folgt, dass $|f(z)|$ das globale Maximum auf dem Rand ∂G annimmt.

Beweis : Es ist \overline{G} abgeschlossen und beschränkt und damit kompakt. $|f(z)|$ ist zwar nicht analytisch, aber zumindest stetig auf \overline{G} , damit muss $|f|$ dort ein Maximum annehmen. Es existiert also ein $z_0 \in \overline{G}$ mit $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ für alle $z \in \overline{G}$. Wir nehmen nun an, dass $z_0 \notin \partial G$ ist. Dann ist $z_0 \in G$ und da G offen ist gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(z_0) \subset G$. Auf diesen Kreis können wir nun das Maximumsprinzip für Kreise anwenden und es folgt $f|_{U_\varepsilon(z_0)} \equiv f(z_0)$. Mit dem Identitätssatz und der Stetigkeit folgt dann $f(z) = f(z_0)$ für alle $z \in \overline{G}$. \square

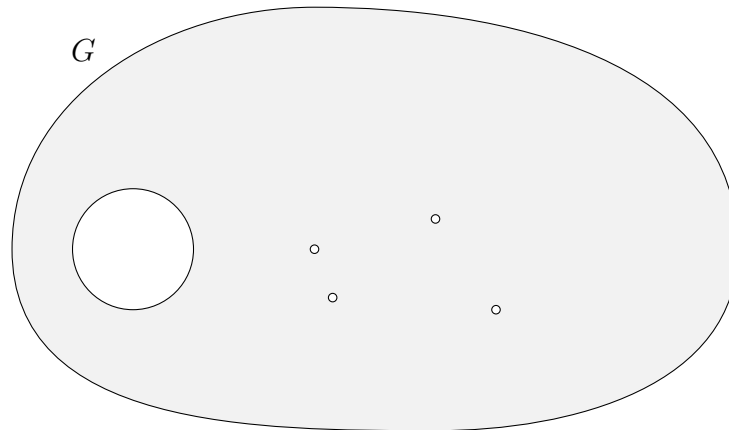
Lemma I.11.1

Es sei $f \in \mathcal{A}(U_R(0))$ mit $f(0) = 0$ und es gelte $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in U_R(0)$. Dann gilt die Abschätzung

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R} |z|.$$

Beweis : Der Beweis wird zur Übung überlassen. Er erfolgt durch eine Anwendung des Maximumprinzips für $g(z) := \frac{f(z)}{z}$. \square

I.12. Singularitäten



Es sei $J = \text{iso}(\mathbb{C} \setminus G)$. Dann gilt $a \in J$ genau dann, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $U_\varepsilon(a) \setminus \{a\} \subset G$ ist. Ist $f \in \mathcal{A}(G)$, so nennt man J die **Menge der isolierten Singularitäten** von f .

Definition I.12.1 hebbare / wesentliche Singularität, Polstelle

Eine Singularität $a \in J$ heißt

1. **hebbbar** genau dann, wenn ein $w \in \mathbb{C}$ existiert, so dass $\tilde{f}(z) := f(z)$ mit $z \neq a$ und $f(a) := w$ analytisch ist, also $\tilde{f} \in \mathcal{A}(G \cup \{a\})$ gilt.
2. **Polstelle** der Ordnung m genau dann, wenn a für $(z - a)^m f(z)$ eine hebbare Singularität ist, wobei $m \in \mathbb{N}$ kleinstmöglich sein muss.
3. **wesentlich** genau dann, wenn keiner dieser Fälle zutrifft.

Definition I.12.2 Meromorphie

Besitzt $f \in \mathcal{A}(G)$ nur isolierte Singularitäten, welche hebbbar bzw. Polstellen endlicher Ordnung sind, so nennt man f **meromorph** auf $G \cup J$.

Beispiel: Sind p, q Polynome und q sei nicht konstant 0. Dann ist $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ meromorph auf \mathbb{C} .

Beispiel: Seien $h, g \in \mathcal{A}(U_r(a))$ mit $r > 0$. Ferner sei a eine Nullstelle der Ordnung n für h und der Ordnung m für g . Dann gilt für $f(z) := \frac{g(z)}{h(z)}$ und $z \in U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ mit einem geeigneten $\varepsilon > 0$:

1. Für $m > n$ hat f eine Polstelle der Ordnung $m - n$ in a .
2. Für $m = n$ hat f eine hebbare Singularität mit $\tilde{f}(a) \neq 0$.
3. Für $m < n$ hat \tilde{f} eine hebbare Singularität und eine Nullstelle der Ordnung $m - n$ in a .

Beweisen lässt sich dies mit $h(z) = (z - a)^m \tilde{h}(z)$ und $g(z) = (z - a)^n \tilde{g}(z)$, wobei $\tilde{h}, \tilde{g} \in \mathcal{A}(U_\varepsilon(a))$, sowie $\tilde{h}(z) \neq 0$ und $\tilde{g}(z) \neq 0$ für $|z - a| < \varepsilon$ gilt.

Die Laurent-Reihe

Eine **Laurent-Reihe** hat die Form

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(z - a)^k = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(z - a)^k}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(z - a)^k}_{\text{Nebenteil}}.$$

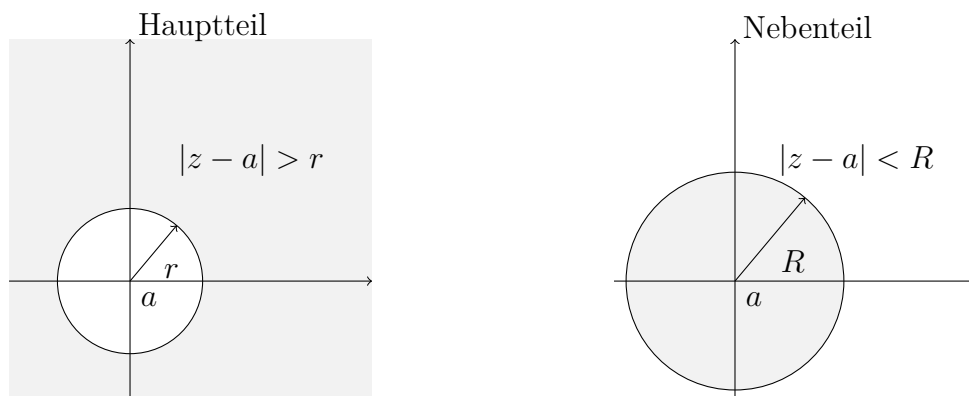
Die Laurent-Reihe konvergiert genau dann, wenn sowohl Haupt- als auch Nebenteil konvergieren.

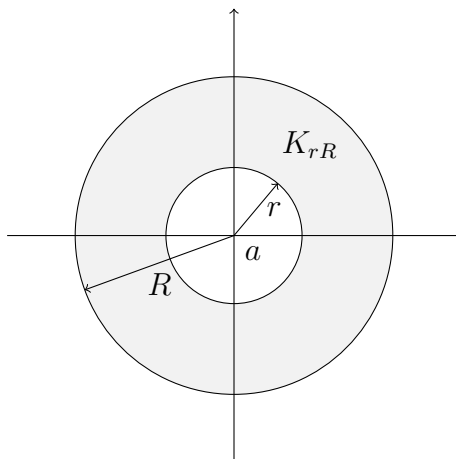
Der Nebenteil der Laurent-Reihe ist eine gewöhnliche Potenzreihe, die dementsprechend einen Konvergenzradius R besitzt, für welchen

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} \tag{**}$$

gilt. Der Hauptteil ist *ebenfalls* eine Potenzreihe, allerdings in $w = \frac{1}{z-a}$ und besitzt den Konvergenzradius $\frac{1}{r}$ mit

$$r = \limsup_{k \rightarrow -\infty} \sqrt[|k|]{|c_k|}. \tag{**}$$





Den Konvergenz-Kreisring bezeichnen wir ab sofort mit K_{rR} . Falls für r und R gegeben durch (***) gilt, dass $r < R$ ist, so gilt für $K_{rR} = \{z \mid r < |z - a| < R\}$, dass

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(z - a)^k$$

in K_{rR} konvergiert und für $z \notin \overline{K_{rR}}$ divergiert. Ferner gilt $f \in \mathcal{A}(K_{rR})$ und die Laurent-Reihe ist gliedweise differenzierbar mit

$$f'(z) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} k c_k (z - a)^{k-1}.$$

Für $r \geq R$ ist $K_{rR} = \emptyset$ und die Laurent-Reihe konvergiert nirgends.

Frage: Wann besitzt $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(z - a)^k$ eine Stammfunktion $F(z)$ in K_{rR} ? Die Antwort lautet, dass dies genau dann der Fall ist, wenn $c_{-1} = 0$ ist. Bestimmen lässt sie sich dann durch gliedweises integrieren:

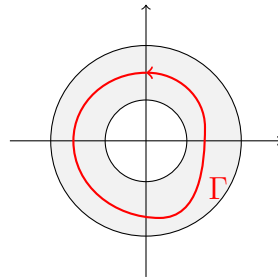
$$F(z) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq -1}}^{+\infty} \frac{c_k}{k+1} (z - a)^{k+1}.$$

Frage: Wie berechnet man die Koeffizienten?

Es sei $a = 0$ und $0 \leq r < R$. Dann konvergiert f in einem Kreisring und es ist

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k \\ &= \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-2} c_k z^k}_{\text{Hauptteil}} + \frac{c_{-1}}{z} + \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k}_{\text{Nebenteil}}. \end{aligned}$$

Angenommen wir haben einen Pfad wie folgt gegeben:



Dann gilt wegen gleichmäßiger Konvergenz

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} f(z) \, dz &= \oint_{\Gamma} \sum_{k=-\infty}^{-2} c_k z^k \, dz + \oint_{\Gamma} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k \, dz + \oint_{\Gamma} \frac{c_{-1}}{z} \, dz \\ &= \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq -1}}^{+\infty} c_k \underbrace{\oint_{\Gamma} z^k \, dz}_{=0} + c_{-1} \underbrace{\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z}}_{=2\pi i}. \end{aligned}$$

Man erhält also schließlich das so genannte **Residuum** von f :

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) \, dz =: \text{Res}(f).$$

Man kann sich ebenso herleiten, dass für die anderen Koeffizienten gilt:

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z)(z-a)^{-1-k} \, dz.$$

Frage: Wie kann man die Koeffizientenbeträge $|c_k|$ abschätzen?

Es gilt

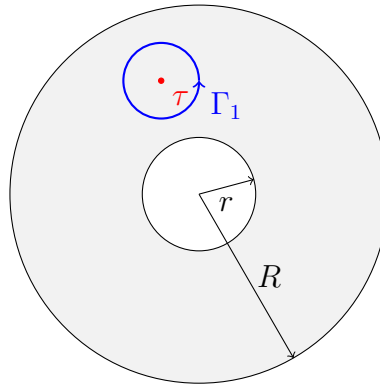
$$\begin{aligned} |c_k| &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{|z-a|=\rho} f(z)(z-a)^{-1-k} \, dz \right| \\ &\leq \frac{2\pi\rho}{2\pi} M \rho^{-1-k} = M \rho^{-k}, \end{aligned}$$

wobei $M = \sup_{|z-a|=\rho} |f(z)|$ und $r < \rho < R$ ist.

Satz I.12.3

Sei $r < R$ und $f \in \mathcal{A}(K_{rR}(a))$. Dann folgt, dass f in K_{rR} als Laurent-Reihe darstellbar ist.

Beweis : Wir werden den Beweis hier nur skizzieren. Es sei $\tau \in K_{rR}(a)$ und Γ_1 wie im Bild gegeben:



Dann gilt mit der Formel von Cauchy

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{z - \tau} dz.$$

Wir können Γ_1 nun so deformieren, dass es K_{rR} möglichst ausfüllt und erhalten so ein Γ_2 . Diese Konstruktion kennen wir bereits, wir erhalten auf diese Weise zwei Integrale entlang des äußeren (Γ^+) und inneren (Γ^-) Randes von K_{rR} – wobei beide unterschiedliche Orientierung besitzen – und erhalten auf diese Weise

$$f(\tau) = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{(z - a) - (\tau - a)} dz}_{=: I_1} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^-} \frac{f(z)}{(z - a) - (\tau - a)} dz}_{=: I_2}.$$

Für Γ^+ gilt, dass es ein q mit $\left| \frac{\tau - a}{z - a} \right| < q < 1$ gibt; für Γ^- gibt es ein p mit $\left| \frac{z - a}{\tau - a} \right| < p < 1$.

Nun erhalten wir mit $\left(1 - \left(\frac{\tau - a}{z - a} \right) \right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\tau - a}{z - a} \right)^k$:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\tau - a}{z - a} \right)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} (\tau - a)^k \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{(z - a)^{k+1}} dz \end{aligned}$$

Da wir erst bei $k = 0$ zu summieren anfangen sehen wir, dass dieses I_1 gerade den Nebenteil beschreibt. Für I_2 gilt dann analog bzw. digital

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^-} \frac{f(z)}{\tau - a} \cdot \frac{1}{\left(\frac{z - a}{\tau - a} \right) - 1} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^-} \frac{f(z)}{\tau - a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - a}{\tau - a} \right)^k dz \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\tau - a)^{-k-1} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^-} f(z)(z - a)^k dz}_{=: c_{-k-1}}, \end{aligned}$$

womit I_2 also gerade den Hauptteil beschreibt. Dem Leser wird überlassen, diese Skizze auszuarbeiten. \square

Zusammenfassung:

1. In einem Kreis $U_R(a)$ ist $f \in \mathcal{A}(U_R(a))$ genau dann, wenn es eine Darstellung $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ gibt. Sie konvergiert dann mindestens in diesem Kreis und wir können gliedweise differenzieren und gliedweise integrieren (insbesondere gibt es also immer eine Stammfunktion).
2. In einem Kreisring $K_{rR}(a)$ ist $f \in \mathcal{A}(K_{rR}(a))$ genau dann, wenn es eine Darstellung $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k$ gibt. Sie konvergiert dann mindestens in diesem Kreisring und wir können gliedweise differenzieren. Eine Stammfunktion existiert genau dann, wenn $c_{-1} = 0$ ist.

Spezialfall: Es sei nun $r = 0$. Dann gilt $K_{0R}(a) = U_R(a) \setminus \{a\}$. Es sei $f \in \mathcal{A}(U_R(a) \setminus \{a\})$, dann ist f darstellbar als Laurent-Reihe $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k$.

1. *Fall 1:* a ist eine hebbare Singularität. Dann ist \tilde{f} in $\mathcal{A}(U_R(a))$, wobei $\tilde{f}(z) = f(z)$ für $z \neq a$ und $\tilde{f}(a) = B$ mit einem geeigneten B ist. Dann gilt aber

$$f(z) = \tilde{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k.$$

Eine hebbare Singularität liegt also genau dann vor, wenn der Hauptteil der Laurent-Reihe verschwindet. Insbesondere gilt: Sei $f \in \mathcal{A}(U_R(a) \setminus \{a\})$ und $M = \sup_{z \in U_R(a) \setminus \{a\}} |f(z)| < \infty$. Mit unserer obigen Abschätzung an die Koeffizienten gilt $|c_k| \leq M\rho^{-k}$ mit $r = 0 < \rho < R$. Für $\rho \rightarrow 0$ und $k < 0$ gilt dann $c_k = 0$. Diese formal schwächere Aussage, dass die Funktion beschränkt ist (statt zu wissen, dass die Singularität hebbare ist), ist also dennoch äquivalent zu Fall 1.

2. *Fall 2:* a ist eine Polstelle der Ordnung m . D.h., dass $(z-a)^m f(z)$ eine hebbare Singularität besitzt. Dann gilt $(z-a)^m f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k(z-a)^k$ und damit

$$f(z) = \frac{\tilde{c}_0}{(z-a)^m} + \frac{\tilde{c}_1}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \tilde{c}_m + \tilde{c}_{m+1}(z-a) + \dots$$

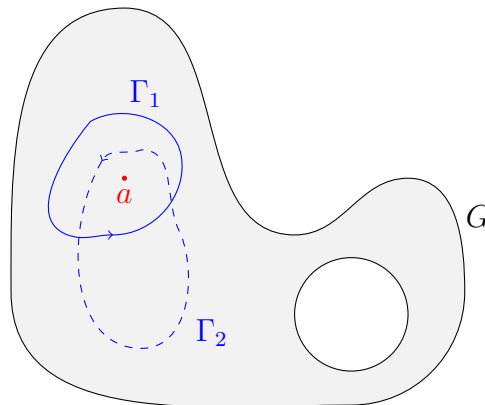
Der Hauptteil besitzt also nur endlich viele Summanden, wobei der Term bei der führenden Singularität $(z-a)^{-m}$ nicht verschwinden kann.

3. *Fall 3:* a ist eine wesentliche Singularität. Nach Definition liegt weder Fall 1, noch Fall 2 vor. Damit ist dies äquivalent dazu, dass der Hauptteil aus unendlich vielen Summanden besteht.

„Ohne Wissen kann man nicht denken“ - Timo Weidl.

I.13. Residuensatz und Residuenkalkül

Es sei $f \in \mathcal{A}(G \setminus \{a\})$ und G sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet oder Γ_1, Γ_2 in G seien homotop zum Nullpfad. Zudem seien Γ_1, Γ_2 homotop zum einfachen mathematisch positiven Umlauf von a . Ferner sei a eine isolierte Singularität von f .



In der punktierten Kreisscheibe können wir f also als Laurent-Reihe schreiben, d.h. es gilt $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k$. Wir haben gesehen, dass dann $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_j} f(z) dz$ gilt ($j \in \{1, 2\}$).

Definition I.13.1 Residuum

Den Koeffizienten c_{-1} der Laurentreihe nennen wir das **Residuum** und schreiben $c_{-1} = \text{Res}_a f$.

Es gilt also $\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}_a f$, wir können Integrale also berechnen, indem wir betrachten, wie sich die Funktion in der Singularität verhält.

Wir wollen nun eine allgemeinere Situation betrachten. Wir nehmen an, dass wir eine ganze Menge $J = \{a_1, \dots, a_N\}$ von isolierten Singularitäten haben. Ferner sei $f \in \mathcal{A}(G \setminus J)$. Ferner sei Γ ein Pfad, der zwar mehrere, aber nicht alle Singularitäten genau einmal im positiven Sinne umläuft (und wie oben sei Γ in G homotop zum Nullpfad, d.h. wir umlaufen keine Löcher). Die Menge der Singularitäten, die Γ umläuft, nennen wir $J' \subset J$. Dann ist

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a \in J'} \text{Res}_a f.$$

Nun betrachten wir nochmals eine allgemeinere Situation. Wieder sei Γ in G homotop zum Nullpfad und J sei wie oben gegeben. Zusätzlich zur obigen Situation erlauben wir

nun, dass einzelne Singularitäten aus J' mehrfach umlaufen werden können. Wir hatten hierfür den Begriff der Windungszahl $n(\Gamma, a_k)$. Dann gilt insgesamt die Formel

$$\oint_{\Gamma} f(z) \, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N n(\Gamma, a_k) \operatorname{Res}_{a_k} f.$$

Frage: Wie können wir die Residuen nun praktisch berechnen?

- *Fall 1:* Ist a_k eine hebbare Singularität, so haben wir gesehen, dass es keinen Hauptteil in der Laurent-Reihe gibt. Damit gilt $\operatorname{Res}_{a_k} f = c_{-1}(a_k) = 0$.
- *Fall 2:* Sei a_k eine Polstelle der Ordnung m . Für $m = 1$ ist dann $(z - a_k)f(z) = c_{-1} + c_0(z - a_k) + \dots$ und wir erhalten $c_{-1} = \lim_{z \rightarrow a_k} (z - a_k)f(z)$. Für $m \geq 2$ ist also $(z - a_k)^m f(z) = c_{-m} + (z - a_k)c_{-m+1} + \dots + (z - a_k)^{m-1}c_{-1} + \dots$. Dann erhalten wir

$$\lim_{z \rightarrow a_k} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - a_k)^m f(z) = (m - 1)! \cdot c_{-1}.$$

Umformen liefert uns also

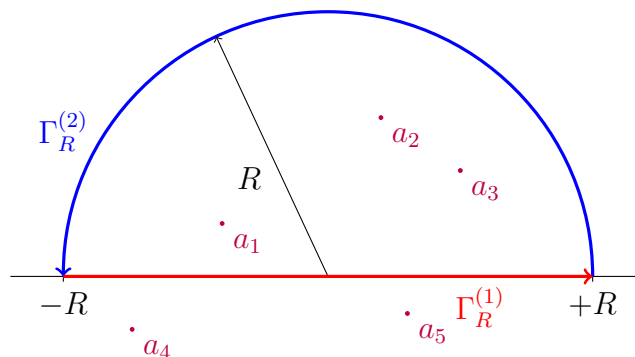
$$\operatorname{Res}_{a_k} f = \frac{1}{(m - 1)!} \lim_{z \rightarrow a_k} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - a_k)^m f(z).$$

- *Fall 3:* Ist a_k eine wesentliche Singularität, so lässt sich keine derart simple Formel angeben. Die Residuenformel gilt dennoch auch hier.

Beispiel: $p(z)$ und $q(z)$ seien Polynome mit $\deg q \geq \deg p + 2$. Insbesondere besitzt q damit Nullstellen, die gerade die Singularitäten von $f(z) := \frac{p(z)}{q(z)}$ darstellen. Für diese Nullstellenmenge J gelte zudem $J \cap \mathbb{R} = \emptyset$. Wir interessieren uns nun für das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \, dz.$$

Da q auf \mathbb{R} keine Nullstellen besitzt ist f auf \mathbb{R} stetig. Ferner gilt $f(x) = O(|x|^{-2})$ für $|x| \rightarrow \infty$. Damit existiert das uneigentliche Integral I und es gilt $I = \lim_{R \rightarrow \infty} I_R$, wobei $I_R = \int_{-R}^R \frac{p(x)}{q(x)} \, dx$ ist.



Wählen wir nun $\Gamma_R = \Gamma_R^{(1)} \cup \Gamma_R^{(2)}$ (wie üblich im Sinne des „Aneinanderklebens“), so erhalten wir einen geschlossenen Pfad. Wir machen folgende Beobachtungen:

1. Für alle $R > R_1$ mit einem geeigneten R_1 gilt $J \cap \Gamma_R^{(2)} = \emptyset$.
2. Damit existieren alle Integrale in der Gleichung

$$\underbrace{\int_{\Gamma_R^{(1)}} f(z) dz + \int_{\Gamma_R^{(2)}} f(z) dz}_{=I_R} = \int_{\Gamma_R} f(z) dz \quad (*)$$

und es gilt

$$= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res}_{a_k} f.$$

Der letzte Ausdruck ist konstant in R . Wir wollen nun zeigen, dass das Integral über $\Gamma_R^{(2)}$ für $R \rightarrow \infty$ verschwindet.

3. Wir können f darstellen als

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0}{\tilde{c}_m z^m + \dots + \tilde{c}_1 z + \tilde{c}_0} \\ &= \frac{c_n}{\tilde{c}_m} z^{n-m} \cdot \frac{1 + O\left(\frac{1}{z}\right)}{1 + O\left(\frac{1}{z}\right)}, z \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Genauer, aber dies werden wir hier nicht zeigen, gilt für alle $R = |z| > R_2$ die Abschätzung $|f(z)| \leq C|z|^{n-m}$. Für $n - m \leq -2$ folgt nun

$$\left| \int_{\Gamma_R^{(2)}} f(z) dz \right| \leq \pi R \cdot C R^{-2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Für $R \rightarrow \infty$ erhalten wir aus der Gleichung (*) damit schließlich die Gleichung

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res}_{a_k} f.$$

Hinweis: Sei a_k eine Nullstelle von q der Ordnung 1. Dann gilt wegen $q(a_k) = 0$:

$$\operatorname{Res}_{a_k} f = \lim_{z \rightarrow a_k} (z - a_k) \frac{p(z)}{q(z) - q(a_k)} = \frac{p(a_k)}{q'(a_k)}.$$

Beispiel: Wir betrachten $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Dann gilt $J = \{-i, +i\}$, interessant ist bei unserer Konstruktion aber lediglich die Nullstelle $+i$. Da f der Quotient zweier Polynome und i eine einfache Nullstelle ist können wir die eben kennengelernte Formel anwenden und erhalten $\operatorname{Res}_i f = \frac{1}{2i}$. Für das Integral erhalten wir dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi.$$

I.14. Das Zählen von Pol- und Nullstellen

In \mathbb{R} kann sich die Anzahl der Nullstellen einer Funktion bei geringfügigen Deformationen sprunghaft ändern (man denke an eine Parabel). Wir können uns aber leicht überlegen, dass es Gründe gibt, anzunehmen, dass dies in \mathbb{C} unter gewissen Umständen anders ist. Dies wollen wir näher untersuchen.

Wir betrachten einen Punkt a , der für $f \in \mathcal{A}(U_\varepsilon(a))$ mit $\varepsilon > 0$ eine Nullstelle der Ordnung m von f ist. Dann gilt $f(z) = c_m(z-a)^m + c_{m+1}(z-a)^{m+1} + \dots$. Durch Ableiten erhalten wir $f'(z) = mc_m(z-a)^{m-1} + \dots$. Damit erhalten wir

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{mc_m(z-a)^{m-1}}{c_m(z-a)^m} \cdot \underbrace{\frac{1 + \frac{m+1}{m} \cdot \frac{c_{m+1}}{c_m}(z-a) + \dots}{1 + \frac{c_{m+1}}{m}(z-a) + \dots}}_{=1+r(z)}.$$

Für genügend kleines ε gilt also

$$= \frac{m}{z-a} (1+r(z)),$$

wobei $r \in \mathcal{A}(U_\varepsilon(a))$ mit $r(a) = 0$ gilt. Damit erhalten wir für das Residuum $\text{Res}_a \frac{f'}{f} = m$, was gerade die Ordnung der Nullstelle von f ist.

Ist nun hingegen a eine Polstelle der Ordnung n für f , so erhalten wir mit der selben Rechnung $\text{Res}_a \frac{f'}{f} = -n$.

Sei nun G ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $\Omega \subset G$ habe einen C^1 -Rand. Ferner sei $\Gamma = \partial\Omega$. Die Menge $J = \{a_1, \dots, a_k\}$ sei die Menge der Polstellen der Ordnungen n_1, \dots, n_k von der Abbildung $f \in \mathcal{A}(G \setminus J)$. Weiter sei $\{b_1, \dots, b_r\}$ die Menge der Nullstellen von f der Ordnungen m_1, \dots, m_r . Dann erhalten wir

$$\oint_{\Gamma=\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{l: b_l \in \Omega} m_l - \sum_{l: a_l \in \Omega} n_l.$$

Dies ist bekannt als **Satz von Rouché**.

Satz I.14.1

Es seien G , $\Gamma = \partial\Omega$ und Ω wie oben gegeben. Es gelte $f, g \in \mathcal{A}(G)$ (d.h. wir haben keine Polstellen in G). Ferner gelte $|g(z)| < |f(z)|$ für alle $z \in \Gamma$. Dann gilt

$$\sum_{l: b_l(f) \in \Omega} m_l(f) = \sum_{l: b_l(f+g) \in \Omega} m_l(f+g).$$

Beweis : Es sei $f_\varepsilon(z) = f(z) + \varepsilon g(z)$ für $0 < \varepsilon \leq 1$. Dann gilt $f_\varepsilon \in \mathcal{A}(G)$. Aus der Ungleichung der Voraussetzungen folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung insbesondere $f_\varepsilon(z) \neq 0$ für alle $z \in \Gamma$. Dann folgt, dass $\frac{f'_\varepsilon(z)}{f_\varepsilon(z)}$ stetig in ε für $z \in \Gamma$ ist. Dann ist $\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f'_\varepsilon(z)}{f_\varepsilon(z)} dz$ ebenfalls stetig in ε . Andererseits ist $I_\varepsilon = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f'_\varepsilon(z)}{f_\varepsilon(z)} dz \in \mathbb{Z}$. Damit folgt, dass I_ε konstant in ε ist und damit gilt insbesondere $I_0 = I_1$. \square

I.15. Harmonische Funktionen

Wir greifen hier wieder die Cauchy-Riemann-Gleichungen und die dort eingeführte Notation auf. Wir erinnern uns, dass, falls f komplex differenzierbar ist, alle partiellen Ableitungen existieren und es gilt

$$f' = u'_x + iv'_x = u'_x - iu'_y = v'_y - iu'_y = v'_y + iw'_x.$$

Inzwischen wissen wir: Ist f holomorph – also in einem Gebiet um einen Punkt komplex differenzierbar –, so ist sie auch unendlich oft differenzierbar. Damit gilt

$$(u'_x)'_x = (v'_y)'_x = (v'_x)'_y = (-u'_y)'_y.$$

Ferner sind alle diese zweiten Ableitungen stetig und es gilt $u''_{xx} = -u''_{yy}$ und damit $\Delta u = (u''_{xx} + u''_{yy}) = 0$. Da wir eine *harmonische* Funktion so definiert haben, dass die zweiten partiellen Ableitungen stetig sind und $\Delta u = 0$ gilt, so folgt für $f = u + iv \in \mathcal{A}(G)$, dass $u \in H(G)$ ist. Mit $H(G)$ bezeichnen wir dabei die Menge der harmonischen Funktionen. Analog zeigt man $v \in H(G)$.

Wichtig: Im Allgemeinen folgt aus $u, v \in H(G)$ aber *nicht* $u + iv \in \mathcal{A}(G)$.

Frage: Gegeben sei $u \in H(G)$.

- Existiert dann eine Funktion $v \in H(G)$, so dass $f = u + iv \in \mathcal{A}(G)$ gilt?
- Wie viele solche v existieren?

Eindeutigkeit: Es sei $u \in H(G)$ und es existieren zwei Funktionen $v_1, v_2 \in H(G)$, so dass $f_1 = u + iv_1$ und $f_2 = u + iv_2$ beide holomorph sind. Dann gilt $f = f_1 - f_2 \in \mathcal{A}(G)$. Es ist aber $f = i(v_1 - v_2)$ und damit $\operatorname{Re} f = 0$. Wir wissen aber, dass f dann konstant sein muss. Damit folgt $v_1 - v_2 = c$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Satz I.15.1

Sei G einfach zusammenhängend. Dann existiert zu jedem $u \in H(G)$ ein (**harm-
nisch konjugiertes**) $v \in H(G)$, so dass $f = u + iv \in \mathcal{A}(G)$ ist.

Beweis : Wir wollen den Beweis hier skizzieren. Falls zu $u \in H(G)$ ein $f = u + iv \in \mathcal{A}(G)$ existiert, so folgt $f' = u'_x - iu'_y = w_r + iw_i = g$, wobei $w_r := u'_x$ und $w_i := -u'_y$ gesetzt wurde. Dann folgt

$$\begin{aligned}(w_r)'_x &= (u'_x)'_x = u''_{xx} = -u''_{yy} = (w_i)'_y \\ (w_r)'_y &= (u'_x)'_y = (u'_y)'_x = -(w_i)'_x.\end{aligned}$$

Mit anderen Worten: Ist $u \in H(G)$ und $w_r = u'_x$ und $w_i = -u'_y$, so erfüllen w_r und w_i die Cauchy-Riemann-Gleichungen. Dann ist $g = w_r + iw_i \in \mathcal{A}(G)$. Da G einfach zusammenhängend ist existiert eine Stammfunktion f zu g . Da sich $f = u + iv$ darstellen lässt haben wir damit eine harmonisch konjugierte Funktion v . \square

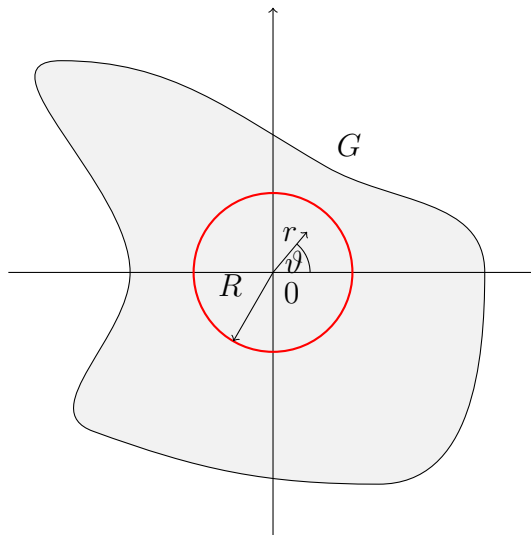
Beispiel: Sei $G = \mathbb{R}^2$ und $u = xy - x \in H(G)$. Es ist $w_r = u'_x = y - 1$ und $w_i = -u'_y = -x$. Dann ist $g = (y - 1) - ix = -1 - i(x + iy)$ und damit $g(z) = -1 - iz$. Damit erhalten wir die Stammfunktion

$$\begin{aligned}f(z) &= -z - \frac{i}{2}z^2 + c = (-x + iy) - \frac{i}{2}(x + iy)^2 \\ &= \underbrace{x(y - 1)}_{=u} + i \underbrace{\left(-y - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2\right)}_{=v}.\end{aligned}$$

Falls sich der Leser fragt, was mit der Konstante passiert ist: Welche Konstante?

Harmonische Funktionen im Kreis

Es sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $U_R(0) \subset G$ und $0 < r < R$. Ferner ist $0 \leq \vartheta < 2\pi$.



Sei $u \in H(G)$. Dann gilt die **Poissonsche Integralformel**:

$$u(re^{i\vartheta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)u(Re^{it})}{R^2 - 2rR \cos(\vartheta - t) + r^2} dt.$$

Beweis : Da G einfach zusammenhängend ist existiert ein $v \in H(G)$, so dass $f = u + iv \in \mathcal{A}(G)$ gilt. Es sei $z = re^{i\vartheta}$ und $0 \leq r < R$. Betrachte $\tau \in \mathbb{C}$ mit $|\tau| = r$ fixiert. Es sei

$$g_\tau(z) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - z\bar{\tau}}.$$

Diese Funktion ist zumindest für $|z| < R$ analytisch in z . Dann ist auch $f(z)g_\tau(z)$ analytisch für $|z| < \frac{R}{r}$. Mit der Formel von Cauchy erhalten wir dann

$$f(z)g_\tau(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U_R(0)} \frac{f(w)g_\tau(w)}{w - z} dw.$$

Parametrisieren wir nun $z = re^{i\vartheta}$ und $w = Re^{it}$, so erhalten wir

$$f(re^{i\vartheta})g_\tau(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})(R^2 - r^2)Re^{it}}{(Re^{it} - re^{i\vartheta})(R^2 - Re^{it}\bar{\tau})} dt$$

Jetzt können wir $\tau = z$ wählen und erhalten $g_z(z) = 1$. Damit folgt

$$\begin{aligned} f(re^{i\vartheta}) \cdot 1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})(R^2 - r^2)Re^{it}}{(Re^{it} - re^{i\vartheta})(R^2 - Rre^{it}e^{-i\vartheta})} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)f(Re^{it})}{R^2 - 2rR \cos(\vartheta - t) + r^2} dt. \end{aligned}$$

Wählt man auf beiden Seiten den Realteil, so erhält man für den Realteil $u(re^{i\vartheta})$ von f die selbe Formel und muss lediglich $f(Re^{it})$ durch $u(Re^{it})$ ersetzen. \square

Wichtiger Spezialfall: $z = 0 \Leftrightarrow r = 0$. Dann folgt

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{it}) dt.$$

Dies ist der **Mittelwertsatz für harmonische Funktionen**. Insbesondere gilt: Ist $u \in H(G)$ und $u|_{\partial U_R} = 0$, so folgt $u \equiv 0$.

Lemma I.15.2 Transfer-Lemma

Es seien G und \tilde{G} einfach zusammenhängende Gebiete und es sei $\psi \in \mathcal{A}(G)$ eine bijektive Funktion $\psi: G \rightarrow \tilde{G}$. Ferner sei $\tilde{u} \in H(\tilde{G})$ und $u = \tilde{u} \circ \psi$. Dann folgt $u \in H(G)$.

Beweis : Es sei $\tilde{f} = \tilde{u} + i\tilde{v} \in \mathcal{A}(\tilde{G})$ und $f = \tilde{f} \circ \psi = \tilde{u} \circ \psi + i\tilde{v} \circ \psi \in \mathcal{A}(G)$. Also ist $\tilde{u} \circ \psi \in H(G)$ als Realteil von $f \in \mathcal{A}(G)$. \square

Das Dirichlet-Problem im Einheitskreis

Gegeben sei der Einheitskreis G , $\Delta u = 0$ in G , $u \in C(G \cup \partial G)$ und die Bedingung $u|_{\partial G} = u_0$. Im allgemeineren Fall ist G ein einfach zusammenhängendes Gebiet und wir können uns mit Hilfe des Transfer-Lemmas dann auf den Einheitskreis zurückziehen. Für diesen (also $G = U_1(0)$) gilt für $u_0 = u_0(e^{it})$ die Lösungsformel

$$u(re^{i\vartheta}) = \begin{cases} u_0(e^{i\vartheta}) & r = 1 \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{r,\vartheta}(t) u_0(e^{it}) dt & 0 \leq r < 1 \end{cases},$$

wobei der sog. **Poisson-Kern** $P_{r,\vartheta}$ gegeben ist durch

$$P_{r,\vartheta}(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\vartheta - t) + r^2}.$$

II. Fourieranalysis

II.1. Motivation

Es sei E ein euklidischer oder hermitscher Raum, das heißt es existiert ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und es sei $\dim E = n$. Dann existiert eine Orthonormalbasis $\{e_1, \dots, e_n\}$ und es gilt $\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk}$ für alle $j, k = 1, \dots, n$. Für $x \in E$ gibt es dann zudem eine Darstellung $x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$ und es gilt $\xi_k = \langle x, e_k \rangle$. Wir nennen diese ξ_k dann **Fourierkoeffizienten**.

Problemstellung: Was passiert im unendlichdimensionalen Fall $\dim E = \infty$? Ein mögliches Beispiel wäre $E = C([a, b], \mathbb{C}) \ni f$. Bei Wahl der kanonischen Norm $\|f\|_C = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ erhält man jedoch keinen Hilbertraum, da die Parallelogrammgleichung nicht erfüllt wird. Wir „borgen“ uns daher ein Skalarprodukt aus einem anderen Raum und definieren $\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{[a, b]} f(t) \overline{g(t)} dt$. Die zugehörige Norm ist aber nicht $\|f\|_C$, sondern $\|f\|_{L^2} = \int_{[a, b]} |f(t)|^2 dt$. Im Folgenden betrachten wir in der Regel insbesondere – und o. B. d. A. – das Intervall $[a, b] = [-\pi, \pi]$.

Betrachten wir beispielsweise die Funktionenfolge $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots$

1. Man kann sehen, dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$ und $m \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. Ferner gilt auch $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = 0$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$.
3. Für das Skalarprodukt einer Funktion mit sich selbst erhalten wir mit $n, m \in \mathbb{N}$ und $n, m \neq 0$:

$$\pi = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, dx.$$

$$\text{Es gilt aber auch z. B. } 2\pi = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 \, dx.$$

Wir erhalten dann das orthonormierte System

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \dots$$

Daraus folgt, dass dieses System linear unabhängig ist. Bei einer unendlichen Menge sprechen wir von linearer Unabhängigkeit dabei genau dann, wenn jede endliche Teilmenge linear unabhängig ist.

Es sei nun wieder ein beliebiges $f \in C([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ gegeben. Für $n, m > 1$ sei zudem $\alpha_n = \langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \rangle_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$ und $\beta_m = \langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos mx \rangle_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx$. Schließlich sei noch $\gamma = \langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \rangle_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot 1 \, dx$. Wir erhalten damit

$$C([-\pi, \pi]) \ni f \mapsto (\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\beta_m\}_{m=1}^{\infty}, \gamma).$$

Alternativ schreibt man manchmal auch:

$$f \longleftrightarrow \underbrace{\frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_n \sin nx}{\sqrt{\pi}} + \frac{\beta_n \cos nx}{\sqrt{\pi}} \right)}_{\text{formale Fourierreihe}}.$$

Frage:

1. Konvergiert diese Reihe? Falls ja, in welchem Sinne konvergiert sie?
2. Was hat der Wert dieser Reihe mit f zu tun?
3. Wie hängen die Eigenschaften von f mit den Eigenschaften von $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ und γ zusammen?

Da es mühsam ist, die Koeffizienten $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ immer mitzunehmen, schreibt man oft auch $C([-\pi, \pi], \mathbb{C}) \ni f \mapsto (\{a_n\}_n, \{b_m\}_m, c)$ und entsprechend

$$f \longleftrightarrow c + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx + b_n \cos nx).$$

Dann gilt $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$, $b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx$ und $c = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$.

Anmerkung: Zu beachten ist, dass wir hier eine unendliche Reihe hinschreiben, über die wir nichts wissen. Insbesondere wissen wir nicht, ob sie konvergiert. Entsprechend sind diese Gleichungen mit Vorsicht zu lesen.

Wir wissen, dass man $\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$ und $\cos mx = \frac{e^{imx} + e^{-imx}}{2}$ schreiben kann. Es gilt für $n, m \in \mathbb{Z}$:

$$\langle e^{inx}, e^{imx} \rangle_{L^2} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 2\pi & n = m \end{cases}.$$

Daraus erhalten wir, dass $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ein Orthonormalsystem (und damit linear unabhängig) ist. Wir definieren dann $\gamma_n = \langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$ und erhalten $f \mapsto \{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ und können analog wie oben eine formale Fourierreihe

$$f \longleftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\gamma_n}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$$

definieren und uns die selben Fragen stellen. Ebenfalls analog können wir mit $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$ auch $f \longleftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-inx}$ schreiben.

Es sei nun eine Laurentreihe um $z_0 = 0$ mit $0 \leq r < 1 < R \leq \infty$ gegeben vermöge $\tilde{f}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$. Für $|z| = 1$ können wir $z = e^{ix}$ mit $x \in [-\pi, \pi]$ schreiben. Dann ist $\tilde{f}(e^{ix}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} =: f(x)$. Wir wissen, dass dann gilt:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{\tilde{f}(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

II.2. Das Kriterium von Dini

Wir definieren uns zunächst für $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} S_N(t) &= c + \sum_{k=1}^N (a_k \sin kt + b_k \cos kt) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikt} \\ &= \sum_{k=-N}^N \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) e^{-ik\tau} d\tau \right) e^{ikt} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \sum_{k=-N}^N e^{ik(t-\tau)} d\tau. \end{aligned}$$

Wir wollen nun die Summe im Inneren näher betrachten. Es ist (mit $t \neq \tau$ für die geometrische Summe):

$$\begin{aligned} \sum_{k=-N}^N e^{ik(t-\tau)} &= e^{-iN(t-\tau)} \sum_{k=0}^{2N} e^{ik(t-\tau)} = e^{-iN(t-\tau)} \frac{1 - e^{i(2N+1)(t-\tau)}}{1 - e^{i(t-\tau)}} \\ &= e^{-iN(t-\tau)} \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})(t-\tau)} \left(e^{-i(N+\frac{1}{2})(t-\tau)} - e^{i(N+\frac{1}{2})(t-\tau)} \right)}{e^{\frac{i}{2}(t-\tau)} \left(e^{-\frac{i}{2}(t-\tau)} - e^{\frac{i}{2}(t-\tau)} \right)} \\ &= \frac{\sin \left(\left(N + \frac{1}{2} \right) (t - \tau) \right)}{\sin(t - \tau)} \end{aligned}$$

Ferner ist nun:

$$S_N(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \mathcal{D}_N(t - \tau) \, d\tau,$$

wobei mit der eben durchgeführten Rechnung gilt:

$$\mathcal{D}_N(s) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^N e^{iks} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \left(\left(N + \frac{1}{2} \right) s \right)}{\sin \frac{s}{2}}.$$

Man nennt dies den **Dirichlet-Kern** und kann leicht zeigen, dass $\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{D}_N(s) \, ds = 1$ gilt, werden dies hier aber nicht durchrechnen. Ebenso sieht man, dass der Dirichlet-Kern eine periodische Funktion zur Periode 2π ist, es gilt also $\mathcal{D}_N(s) = \mathcal{D}_N(s + 2k\pi)$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Weiterhin setzen wir $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ nun 2π -periodisch zu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ fort. Da nun sowohl \mathcal{D}_N , als auch f 2π -periodisch sind (und da $\mathcal{D}_N(t - \tau) = \mathcal{D}_N(\tau - t)$ gilt), erhalten wir:

$$S_N(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{D}_N(s) f(s + t) \, ds.$$

Die Frage ist nun, inwiefern $S_N(t) \xrightarrow{?} f(t)$ gilt. Dazu betrachten wir $f(t) = f(t)$ und multiplizieren eine nahrhafte Eins, um $f(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{D}_N(s) f(t) \, ds$ zu erhalten. Damit ist dann:

$$\begin{aligned} S_N(t) - f(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{D}_N(s) (f(s + t) - f(t)) \, ds \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{f(s + t) - f(t)}{2\pi \sin \frac{s}{2}}}_{\mathcal{F}(s,t)} \cdot \underbrace{\sin \left(\left(N + \frac{1}{2} \right) s \right)}_{\sin(\omega s)} \, ds. \end{aligned}$$

Unser Ziel ist es nun, zu zeigen, dass sich die oszillierenden Anteile gegenseitig auslöschen und das Integral so verschwindet, so dass wir eine Konvergenz erhalten.

Lemma II.2.1

Es sei $\mathcal{F}(s) \in C^1([-\pi, \pi])$. Dann folgt:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{F}(s) \sin(\omega s) \, ds = 0.$$

Beweis : Mit Hilfe der partiellen Integration erhalten wir

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{F}(s) \sin(\omega s) \, ds = \underbrace{-\frac{\cos(\omega s)}{\omega} \mathcal{F}(s) \Big|_{-\pi}^{\pi}}_{\xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(\omega s)}{\omega} \mathcal{F}'(s) \, ds}_{\xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0}$$

Damit ist der Beweis geführt. □

Lemma II.2.2 Lemma von Riemann

Sei $\mathcal{F} \in \mathcal{L}^1([-\pi, \pi], dx)$. Ferner sei

$$I_{\omega}[\mathcal{F}] = \int_{[-\pi, \pi]} \mathcal{F}(x) \sin(\omega x) \, dx.$$

Dann folgt:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} I_{\omega}[\mathcal{F}] = 0.$$

Für den Beweis des Lemmas benötigen wir ein Hilfsmittel, welches wir hier nicht beweisen werden. Dieses besagt, dass $C_0^{\infty}([-\pi, \pi])$, also die Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen, die in den Randpunkten verschwinden, dicht in $\mathcal{L}^1([-\pi, \pi], dx)$ liegt, das heißt für jedes $\mathcal{F} \in \mathcal{L}^1$ existieren $\mathcal{F}_n \in C_0^{\infty}$ mit $\mathcal{F}_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} \mathcal{F}$ für $n \rightarrow \infty$.

Beweis : Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ existiert $\mathcal{F}_{\varepsilon} \in C_0^{\infty}$ mit $\|\mathcal{F} - \mathcal{F}_{\varepsilon}\|_{\mathcal{L}^1} < \varepsilon$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} I_{\omega}[\mathcal{F}] &= \int_{[-\pi, \pi]} \mathcal{F}(s) \sin(\omega s) \, ds \\ &= \underbrace{\int_{[-\pi, \pi]} \mathcal{F}_{\varepsilon}(s) \sin(\omega s) \, ds}_{I_{\omega}[\mathcal{F}_{\varepsilon}]} + \underbrace{\int_{[-\pi, \pi]} (\mathcal{F}(s) - \mathcal{F}_{\varepsilon}(s)) \sin(\omega s) \, ds}_{I_{\omega}[\mathcal{F} - \mathcal{F}_{\varepsilon}]} \end{aligned}$$

Für den zweiten Ausdruck gilt nun

$$|I_\omega[\mathcal{F} - \mathcal{F}_\varepsilon]| \leq \int_{[-\pi, \pi]} |\mathcal{F}_\varepsilon(s) - \mathcal{F}(s)| \cdot 1 \, ds = \|\mathcal{F}_\varepsilon - \mathcal{F}\|_{\mathcal{L}^1} < \varepsilon.$$

Für den ersten Ausdruck können wir nun aber gerade das vorausgehende Lemma anwenden, da $\mathcal{F}_\varepsilon \in C_0^\infty \subset C^1$ gilt. Damit folgt $\lim_{\omega \rightarrow \infty} I_\omega[\mathcal{F}_\varepsilon] = 0$. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung folgt dann:

$$\limsup_{\omega \rightarrow \infty} |I_\omega[\mathcal{F}]| \leq \limsup_{\omega \rightarrow \infty} |I_\omega[\mathcal{F}_\varepsilon]| + \limsup_{\omega \rightarrow \infty} |I_\omega[\mathcal{F} - \mathcal{F}_\varepsilon]|$$

und daraus erhalten wir für beliebiges $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$0 \leq \limsup_{\omega \rightarrow \infty} |I_\omega[\mathcal{F}]| \leq \varepsilon.$$

Daraus folgt dann die Behauptung. \square

Kriterium von Dini zur punktweisen Konvergenz der Fourierreihe

Sei $f \in \mathcal{L}^1([-\pi, \pi], dx)$ und für ein gewähltes $t \in [-\pi, \pi]$ existiere ein $\delta = \delta(t) > 0$ mit

$$\int_{[-\delta, \delta]} \left| \frac{f(t + \tau) - f(t)}{\tau} \right| d\tau < \infty.$$

Dann folgt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(t) = f(t).$$

Beweis : Wir skizzieren hier den Beweis. Es ist:

$$S_N(t) - f(t) = \int_{[-\pi, \pi]} \underbrace{\frac{f(t + \tau) - f(t)}{\tau}}_{\mathcal{F}(\tau, t) \in \mathcal{L}^1} \cdot \frac{\tau}{2\pi \sin \frac{\tau}{2}} \sin \left(\left(N + \frac{1}{2} \right) \tau \right) d\tau.$$

Dann kann man das Lemma von Riemann nutzen und ist fertig. \square

Anmerkung: Die zweite Voraussetzung des Kriteriums (Existenz des δ etc.) ist z. B. erfüllt, wenn f in t differenzierbar ist. Sie ist aber ebenso erfüllt, falls

$$|f(t + \tau) - f(t)| \leq M|\tau|^\alpha$$

für $|\tau| < \delta$ und $\alpha > 0$ gilt.

Wichtig: Die Stetigkeit von f reicht i. A. *nicht*.

Frage: Was geschieht, wenn f in t_0 einen Sprung besitzt?

Modifizierte Dini-Bedingung für Sprungstellen

Es sei $f \in \mathcal{L}^1([-\pi, \pi], dx)$ und für ein gewähltes $t \in [-\pi, \pi]$ existiere $f(t-0)$ und $f(t+0)$. Ferner existiere ein $\delta > 0$ mit

$$\int_{[-\delta, 0]} \frac{|f(t+\tau) - f(t-0)|}{|\tau|} d\tau < \infty$$

und

$$\int_{[0, \delta]} \frac{|f(t+\tau) - f(t+0)|}{|\tau|} d\tau < \infty.$$

Dann folgt:

$$S_N(t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{f(t-0) + f(t+0)}{2}.$$

Der Beweis verläuft weitestgehend analog und wird hier nicht geführt.

Satz II.2.3

Sei f auf $[-\pi, \pi]$ l -fach differenzierbar, es gelte $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$ für $j = 0, \dots, l-1$ und $f^{(l)}$ sei stetig auf $[-\pi, \pi]$. Dann folgt für $n \rightarrow \infty$ jeweils:

$$a_n = o(n^{-l}), b_n = o(n^{-l}), c_n = o(n^{-l}).$$

Beweis : Wir betrachten a_n für den Fall $l = 1$. Es ist:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \sin(n\tau) d\tau \\ &= \underbrace{-\frac{1}{\pi} \frac{\cos(n\tau)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \frac{1}{n\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f'(\tau) \cos(n\tau) d\tau}_{\rightarrow 0}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ für $n \rightarrow \infty$. □

Beispiel: Es sei $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l_1$ (also absolut summierbar). Ferner sei $S(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$ für $t \in [-\pi, \pi]$. Wegen $|e^{ikt}| = 1$ konvergiert diese Reihe nach dem Majorantenkriterium von Weierstraß absolut und gleichmäßig. Da alle e^{ikt} zudem stetig sind, ist auch $S(t)$ stetig. Falls sogar $\{k^l c_k\} \in l_1$ gilt, folgt, dass $S(t)$ l -fach differenzierbar ist.

II.3. Fourierintegral und Fouriertransformation

Im Folgenden sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Definition II.3.1 Fouriertransformation

Wir definieren die **Fourier-Transformierte**:

$$\hat{f}(\lambda) = F[f](\lambda) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau.$$

1. Aus $f \in \mathcal{L}^1$ folgt, dass $\hat{f}(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert und es gilt für $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\lambda)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(\tau) e^{-i\lambda\tau}| d\tau \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(\tau)| d\tau = \frac{\|f\|_{\mathcal{L}^1}}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

2. Die Transformierte \hat{f} ist beschränkt und überdies stetig. Betrachte dazu $\lambda_n \rightarrow \lambda$. Dann ist $f(\tau) e^{i\lambda_n\tau} \rightarrow f(\tau) e^{i\lambda\tau}$ punktweise. Ferner gilt $|f(\tau) e^{i\lambda_n\tau}| \leq |f(\tau)|$ und mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz erhalten wir dann $\hat{f}(\lambda_n) \rightarrow \hat{f}(\lambda)$.
3. Es gilt $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{f}(\lambda) = 0$.

Dazu betrachten wir aber zunächst die σ -Additivität des Lebesgue-Integrals. Es seien $\{E_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ disjunkt und messbar. Ferner sei $E = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j$ und $f \in \mathcal{L}^1(E, d\mu)$. Dann gilt $\int_E f d\mu = \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{E_j} f d\mu$. Wir verwenden dies nun mit $E_j =]j, j+1]$ für $j \in \mathbb{Z}$. Mit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, dx)$ folgt dann $\int_{\mathbb{R}} f dx = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{]j, j+1]} f dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{[-R, R]} f dx$. Das heißt für $\varepsilon > 0$ gibt es $R(\varepsilon) > 0$ mit $\int_{|x| \geq R(\varepsilon)} |f| dx < \varepsilon$.

Zurück zur eigentlichen Aussage erhalten wir nun:

$$\int_{\mathbb{R}} f(\tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau = \left(\int_{|x| > R(\varepsilon)} + \int_{|x| \leq R(\varepsilon)} \right) f(\tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau.$$

Mit dem Lemma von Riemann folgt dann $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{|x| \leq R(\varepsilon)} f(\tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau = 0$. Für den anderen Teil des Integrals folgt mit der Dreiecksungleichung auf der anderen Seite nun auch $\left| \int_{|x| > R(\varepsilon)} f(\tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau \right| \leq \int_{|x| > R(\varepsilon)} |f| d\tau < \varepsilon$. Damit folgt $0 \leq \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} |\hat{f}(\lambda)| \leq \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ und wir erhalten die Aussage.

4. Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, dx)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann folgt $F[\alpha f + \beta g] = \alpha F[f] + \beta F[g]$. Damit ist $F \in \mathcal{L}(\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^\infty)$ ein linearer, beschränkter Operator.

Frage: Gilt $f(t) \stackrel{?}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int F[f](\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda$?

Satz II.3.2 Dini-Bedingung

Es sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, dx)$ und für gegebenes $t_0 \in \mathbb{R}$ gelte die Dini-Bedingung für ein $\delta < 0$:

$$\int_{[t_0-\delta, t_0+\delta]} \left| \frac{f(t_0+x) - f(t_0)}{x} \right| dx < \infty.$$

Dann konvergiert das uneigentliche (Riemann-)Integral und es gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F[f](\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda = f(t_0).$$

Beweis : Wir werden die Aussage nur im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes (v. p.) zeigen, das heißt:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A F[f](\lambda) e^{i\lambda t_0} d\lambda = f(t_0).$$

Betrachte hierfür:

$$I_A(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A d\lambda e^{i\lambda t_0} \int_{\mathbb{R}} f(\tau) e^{-i\lambda \tau} d\tau.$$

Es gilt $h(\lambda, \tau) = e^{i\lambda t_0} f(\tau) e^{-i\lambda \tau} = e^{i\lambda(t_0-\tau)} f(\tau) \in \mathcal{L}^1([-A, A] \times \mathbb{R})$. Daher können wir den Satz von Fubini anwenden. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} I_A(t_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} d\tau f(\tau) \underbrace{\int_{[-A, A]} e^{i\lambda(t_0-\tau)} d\lambda}_{= \frac{2 \sin(A(t_0-\tau))}{t_0-\tau}} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} d\tau f(\tau) \frac{\sin(A(t_0-\tau))}{t_0-\tau} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t_0+x) \frac{\sin(Ax)}{x} dx. \end{aligned}$$

Man kann nun zeigen, dass v.p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Ax}{x} dx = \pi$ gilt. Damit erhalten wir:

$$f(t_0) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-R}^R f(t_0) \frac{\sin Ax}{x} dx.$$

Nun erhalten wir:

$$I_A(t_0) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{[-R, R]} f(t_0+x) \frac{\sin Ax}{x} dx.$$

Subtrahieren dieser Gleichungen liefert:

$$f(t_0) - I_A(t_0) = \lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_R.$$

Dabei gilt:

$$\Delta_R = \frac{1}{\pi} \int_{[-R, R]} \frac{f(t_0) - f(t_0 + x)}{x} \sin(Ax) \, dx$$

Für eine entsprechende Aufteilung in $-R < -N(\varepsilon) < N(\varepsilon) < R$ gilt zudem:

$$\begin{aligned} \Delta_R &= \Delta_1 + \Delta_2(R) + \Delta_3(R) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{[-N(\varepsilon), N(\varepsilon)]} \frac{f(t_0) - f(t_0 + x)}{x} \sin Ax \, dx \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \left(\int_{-R}^{-N(\varepsilon)} + \int_{N(\varepsilon)}^R \right) f(t_0) \frac{\sin Ax}{x} \, dx \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_{[-R, -N(\varepsilon)] \cup [N(\varepsilon), R]} f(t_0 + x) \frac{\sin Ax}{x} \, dx. \end{aligned}$$

Dann erhalten wir $\lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_R = \Delta_1 + \lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_2 + \lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_3$ und damit:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_R = \underbrace{\lim_{A \rightarrow \infty} \Delta_1}_{=0} + \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_2 + \lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_3 \right).$$

Wir müssen noch zeigen, dass die hinteren Summanden ebenfalls verschwinden. Es gilt:

$$\begin{aligned} |\Delta_3(R)| &\leq \frac{1}{\pi} \left(\int_{[-R, N(\varepsilon)]} + \int_{[N(\varepsilon), R]} \right) |f(t_0 + x)| \cdot \frac{1}{N(\varepsilon)} \, dx \\ &\stackrel{N(\varepsilon) \geq 1}{\leq} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus [-N(\varepsilon), N(\varepsilon)]} |f(t_0 + x)| \, dx. \end{aligned}$$

Wir wählen nun $N(\varepsilon) \geq 1$, so dass $\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus [-N, N]} |f(t_0 + x)| \, dx < \varepsilon$ gilt. Dann folgt für alle $R \geq N(\varepsilon)$ und für alle $A > 0$:

$$\leq \varepsilon.$$

Für den mittleren Summanden gilt schließlich noch:

$$|\Delta_2(R)| = \frac{|f(t_0)|}{\pi} \cdot \left| \left(\int_{-R}^{-N(\varepsilon)} + \int_{N(\varepsilon)}^R \right) \frac{\sin Ax}{x} \, dx \right|.$$

Für den Grenzwert erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} |\Delta_2(R)| &= \frac{|f(t_0)|}{\pi} \cdot \left| \left(\int_{-\infty}^{-N(\varepsilon)} + \int_{N(\varepsilon)}^{\infty} \right) \frac{\sin Ax}{x} \, dx \right| \\ &= \frac{|f(t_0)|}{\pi} \cdot \left| \left(\int_{-\infty}^{-N(\varepsilon)A} + \int_{N(\varepsilon)A}^{\infty} \right) \frac{\sin y}{y} \, dy \right|. \end{aligned}$$

Für den Grenzwert $A \rightarrow \infty$ erhalten wir dann schließlich:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_2(R) = 0.$$

Wegen $|\Delta_R| \leq |\Delta_1| + |\Delta_2(R)| + |\Delta_3(R)|$ folgt dann:

$$\limsup_{A \rightarrow \infty} \limsup_{R \rightarrow \infty} |\Delta_R| \leq 0 + 0 + \varepsilon = \varepsilon.$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

II.4. Hilberträume und Fouriertransformationen

Es sei H ein linearer Vektorraum über \mathbb{C} , das heißt wir haben eine Skalarmultiplikation, eine Addition und ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle: H \times H \rightarrow \mathbb{C}$, für welches gilt:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
3. $\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle$ und $\langle x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 \rangle = \overline{\beta_1} \langle x, y_1 \rangle + \overline{\beta_2} \langle x, y_2 \rangle$

Ferner induziert dieses Skalarprodukt eine Norm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0$, für welche die Cauchy-Schwartz-Bunjakowski-Ungleichung $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ gilt. Ist $(H, \|\cdot\|)$ vollständig, so nennen wir H einen Hilbertraum. Zudem gilt die Parallelogrammgleichung:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Beispiel: Es sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in l_2(\mathbb{N})$ oder $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ mit $\|\{a_n\}\|_2^2 = \sum |a_n|^2 < \infty$ gilt $\langle \{a_n\}, \{b_n\} \rangle = \sum a_n \overline{b_n}$. $l_2(\mathbb{N})$ und $l_2(\mathbb{Z})$ sind separabel, das heißt es gibt eine abzählbare, dichte Menge.

Beispiel: Es gilt $f \in \mathcal{L}^2(X, d\mu)$ genau dann, wenn $\|f\|_2^2 = \int_X |f|^2 d\mu$ ist. Das Skalarprodukt ist $\langle f, g \rangle_{\mathcal{L}^2} = \int_X f \overline{g} d\mu$.

In Hilberträumen gilt zudem der Satz des Pythagoras. Für orthogonale Vektoren f, g gilt $\langle f, g \rangle = 0$ und damit $\|f + g\|^2 = \langle f + g, f + g \rangle = \|f\|^2 + \|g\|^2$.

Sind $f_n \rightarrow f$ und $g_n \rightarrow g$ bezüglich $\|\cdot\|$, so folgt (gleichzeitig!) auch $\langle f_n, g_n \rangle \rightarrow \langle f, g \rangle$.

Definition II.4.1 Orthonormalsystem

Ein System $\{\varphi_n\}$ heißt **Orthonormalsystem (ONS)** genau dann, wenn $\langle \varphi_n, \varphi_k \rangle = \delta_{nk}$ gilt.

Definition II.4.2 Lineare Unabhängigkeit

Ein System $\{\varphi_n\}$ heißt **linear unabhängig** genau dann, wenn jedes endliche Teilsystem linear unabhängig ist.

Beispiel: Jedes ONS ist automatisch linear unabhängig.

Definition II.4.3 Vollständigkeit

$\{\varphi_n\}$ heißt **vollständig** genau dann, wenn für alle $x \in H$ und $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon, x)$ und ein Koeffizientensatz $\{\alpha_k(\varepsilon, x)\}_{k=1}^{N(\varepsilon, x)}$ existiert, so dass $\|x - \sum_{k=1}^{N(\varepsilon, x)} \alpha_k(\varepsilon, x) \varphi_k\| < \varepsilon$ gilt.

Definition II.4.4 Basis, Orthonormalbasis

Ein System $\{\varphi_n\}$ heißt **Basis**, wenn es vollständig und linear unabhängig ist. Es heißt überdies **Orthonormalbasis (ONB)**, wenn es zudem ein Orthonormalsystem ist.

Beispiel: Für $H = \mathcal{L}^2([-\pi, \pi], dx)$ ist $\varphi_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ijx}$ ein Orthonormalsystem (für $j \in \mathbb{Z}$). Die Frage ist, ob dies auch eine Basis ist.

Für eine Menge $M \subset H$ sei $f \perp M$ genau dann, wenn $f \perp g$ für alle $g \in M$ gilt. Ferner sei $\vee M$ die Menge aller endlichen Linearkombinationen von Vektoren in M .

Sei $\{\varphi_n\}$ ein ONS und $L = \vee\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$. Dann definieren wir die orthogonale Projektion:

$$P_L: x \in H \mapsto P_L x = \sum_{k=1}^N \underbrace{\langle x, \varphi_k \rangle}_{c_k = c_k(x)} \varphi_k.$$

Es gelten folgende Eigenschaften:

1. P_L ist ein linearer Operator.
2. $\text{ran}(P_L) = L$.
3. $x - P_L x = h \perp L$.
4. $\|x\|^2 = \|P_L x\|^2 + \|h\|^2 \geq \|P_L x\|^2$, also ist P_L beschränkt.

5. $\|P_L x\| = \|x\|$ genau dann, wenn $\|h\| = \|x - P_L x\| = 0$ genau dann, wenn $x \in L$.

6. $P_L(P_L x) = P_L x$ für alle $x \in H$.

Folgerung: Sei $x \in H$ und $f \in L$. Dann gilt $\|x - f\| \geq \|x - P_L x\|$. Betrachte dazu $\|x - f\|^2 = \|(x - P_L x) + (P_L x - f)\|^2$. Es gilt $x - P_L x \perp L$ und $P_L x - f \in L$, damit stehen diese Elemente senkrecht aufeinander und der Rest folgt mit dem Satz des Pythagoras.

Das heißt, dass das Problem $\{f \in L \mid \|x - f\| = \min_{y \in L} \|x - y\|\}$ genau eine Lösung $f = P_L x$ besitzt.

Satz II.4.5 Besselsche Ungleichung

Sei $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem und $x \in H$. Weiter seien $c_k = \langle x, \varphi_k \rangle$ die Fourierkoeffizienten. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|^2.$$

Beweis : Es sei $L = L_N = \bigvee_{k=1}^N \{\varphi_k\}$. Aus der Liste mit Eigenschaften weiter oben folgt $\|x\|^2 \geq \|P_L x\|^2 = \langle \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k, \sum_{l=1}^N c_l \varphi_l \rangle = \sum_{k=1}^N |c_k|^2$. Damit konvergiert die Reihe und erfüllt auch im Grenzwert die gewünschte Ungleichung. \square

Satz II.4.6

Es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2$ genau dann, wenn $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k = x$ bezüglich $\|\cdot\|$ gilt.

Beweis : Wir hatten P_L gerade über $P_{L_N} x = \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k$ definiert. Nun gilt offenbar $\|x - P_{L_N} x\|^2 = \|h_N\|^2$ mit $h_N = x - P_{L_N} x$. Es ist aber auch $\|x - P_{L_N} x\|^2 = \|x\|^2 - \|P_{L_N} x\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^N |c_k|^2$. \square

Definition II.4.7 Abgeschlossenes ONS

Ein ONS $\{\varphi_k\}$ heißt **abgeschlossen** genau dann, wenn für alle $x \in H$ gilt: $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2$. Man nennt dies die Identität von Parseval.

Anmerkung: Nach dem eben Gezeigten ist dies äquivalent dazu, dass $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k = x$ für alle $x \in H$ gilt.

Satz II.4.8

Sei $\{\varphi_k\}$ ein ONS. Dann ist dieses System abgeschlossen genau dann, wenn es vollständig ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn es total ist.

Beweis : Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N(\varepsilon, x)$ und $\{\alpha_k(\varepsilon, x)\}$ mit der folgenden Eigenschaft $\|x - \sum_{k=1}^{N(\varepsilon, x)} \alpha_k(\varepsilon, x) \varphi_k\| < \varepsilon$. Für „ \Rightarrow “ betrachte $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k = x$. Daraus folgt für alle $\varepsilon > 0$ die Existenz von $N(\varepsilon)$ mit $\|x - \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} c_k \varphi_k\| < \varepsilon$. Wir wählen $\alpha_k(\varepsilon, x) = c_k$ und sind fertig. Für „ \Leftarrow “ wähle $\varepsilon > 0$ und $N(\varepsilon, x), \alpha_k(\varepsilon, x)$ wie gegeben. Nun bilden wir $f = \sum_{k=1}^{N(\varepsilon, x)} \alpha_k(\varepsilon, x) \varphi_k \in L = \bigvee_{k=1}^{N(\varepsilon, x)} \{\varphi_k\}$. Dann folgt $\|x - P_{L_N} x\| \leq \|x - f\| < \varepsilon$. Damit folgt $P_{L_N} x \rightarrow x$ für $N \rightarrow \infty$ und damit gilt die Identität von Parseval. \square

Wir betrachten nun einen Hilbertraum H mit einem ONS $\{\varphi_k\}$ und $l^2(\mathbb{N})$, sowie die lineare Abbildung $\Phi: x \mapsto \{c_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit $c_k = \langle x, \varphi_k \rangle$. Es gilt:

1. $\Phi: H \rightarrow l^2(\mathbb{N})$ ist linear.
2. $\|\Phi_x\|_{l^2}^2 = \|\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}}\|_{l^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|^2$, daraus folgt $\|\Phi\|_{\mathcal{L}(H, l^2)} \leq 1$. Genau genommen ist sie sogar $= 1$.
3. $\Phi: H \rightarrow l^2(\mathbb{N})$ ist surjektiv. Betrachte dazu $S_N = \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k$. Es gilt $\|S_M - S_N\|^2 = \left\| \sum_{k=N+1}^M c_k \varphi_k \right\|^2 = \sum_{k=N+1}^M |c_k|^2 < \varepsilon$. Damit ist S_N eine Fundamentalfolge im Hilbertraum H und daher existiert ein x mit $x = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$. Dann gilt $\langle x, \varphi_k \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle S_N, \varphi_k \rangle = c_k$.
4. Falls $\{\varphi_k\}$ vollständig (also eine ONB) ist, so ist Φ auch injektiv. Da Φ linear ist, genügt es, zu zeigen, dass der Kern trivial ist. Dies lässt sich leicht zeigen.
5. Gegeben sei x' mit $\{c'_k\}$ und x'' mit $\{c''_k\}$. Dann ist $\langle x', x'' \rangle_H = \langle \Phi x', \Phi x'' \rangle_{l^2} = \sum_{k=1}^{\infty} c'_k \overline{c''_k}$.

Definition II.4.9 Totalität

Ein ONS $\{\varphi_k\}$ heißt **total** genau dann, wenn für alle $x \in H$ und alle $k \in \mathbb{N}$ mit $c_k = \langle x, \varphi_k \rangle = 0$ folgt, dass $x = 0$ ist.

Die weiter oben formulierte Äquivalenz von Abgeschlossenheit und Totalität folgt dann wie folgt: Ist $c_k = 0$ für alle k , so ist $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = 0$ und damit $x = 0$. Die andere Richtung wird über einen Widerspruch geführt. Angenommen, es existierte ein

$g \in H$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \neq \|g\|^2$ mit $c_k = \langle g, \varphi_k \rangle$. Wie oben finden wir ein $x \in H$ mit $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$ und betrachten $h = g - x$. Dann folgt $\langle h, \varphi_k \rangle = c_k - c_k = 0$ für alle k . Da das System total ist, muss aber $h = 0$ und damit $g = x$ sein, dies ist jedoch ein Widerspruch.

II.5. Delta-Folgen. Die Diracsche Delta-Funktion

Es sei $a < 0 < b$ und $g_n \in \mathcal{L}^1([a, b], dx)$.

Definition II.5.1 Delta-Folge

g_n heißt **Delta-Folge** genau dann, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. $g_n(t) \geq 0$ für alle $t \in [a, b]$ und $n \in \mathbb{N}$.
2. $\int_{[a,b]} g_n(t) dt \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$.
3. Für alle $\delta > 0$ und für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N(\varepsilon, \delta)$, so dass für alle $n \geq N(\varepsilon, \delta)$ gilt:

$$\left(\int_{[a, -\delta]} g_n dt + \int_{[\delta, b]} g_n(t) dt \right) < \varepsilon.$$

Satz II.5.2

Sei $f \in C([a, b])$ und g_n eine Delta-Folge. Dann folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} f(t) g_n(t) dt = f(0).$$

Beweis : Es ist $f(0) = f(0) \cdot 1 = f(0) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} g_n dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} f(0) g_n(t) dt$. Dann folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} f(t) g_n(t) dt - f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{[a,b]} (f(t) - f(0)) g_n(t) dt}_{I_n}.$$

Wir teilen nun das Integral I_n auf vermöge

$$I_n = \left(\int_{[a, -\delta]} + \int_{[-\delta, +\delta]} + \int_{[+\delta, b]} \right) (f(t) - f(0)) g_n(t) dt$$

und bezeichnen diese in dieser Reihenfolge mit $I_n^{\delta,-}$, I_n^δ und $I_n^{\delta,+}$. Da f stetig auf $[a, b]$ ist, ist f auch gleichmäßig stetig. Für alle $\varepsilon_0 > 0$ existiert nun ein $\delta = \delta(\varepsilon_0)$, so dass für alle t, t' mit $|t - t'| < 2\delta(\varepsilon_0)$ gilt: $|f(t) - f(t')| < \varepsilon_0$. Damit folgt:

$$|I_n^\delta| \leq \int_{[-\delta, +\delta]} |f(t) - f(0)| g_n(t) dt \leq \int_{[-\delta, \delta]} \varepsilon_0 g_n(t) dt \leq \varepsilon_0 \underbrace{\int_{[a, b]} g_n(t) dt}_{\rightarrow 1}.$$

Damit folgt $\limsup_{n \rightarrow \infty} |I_n^\delta| \leq \varepsilon_0$. Ferner ist f als stetige Funktion auf einem kompakten Intervall beschränkt und es gilt $|f(t) - f(0)| \leq 2C$. Damit ist für $n \geq N(\varepsilon, \delta)$:

$$\begin{aligned} |I_n^{\delta,-}| + |I_n^{\delta,+}| &\leq \left(\int_{[a, -\delta]} + \int_{[\delta, b]} \right) 2C g_n(t) dt \\ &\leq 2C\varepsilon. \end{aligned}$$

Damit folgt $|I_n^{\delta,-}| + |I_n^{\delta,+}| \rightarrow 0$. □

Beispiel: Es sei $[a, b] = [-\pi, \pi]$ und $g_n(x) = \varphi_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \left(\frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2$. Die erste Eigenschaft ist offenbar erfüllt, für die zweite Eigenschaft betrachte den Dirichlet-Kern $\mathcal{D}_k(x) = \frac{\sin(k + \frac{1}{2})x}{2\pi \sin \frac{x}{2}}$, für den wir bereits $\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{D}_k(x) dx = 1$ wissen. Es gilt $\varphi_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{D}_k(x)$, woraus die zweite Eigenschaft folgt. Diese Identität gilt wegen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 &= \frac{\sin \frac{n}{2}x}{\sin^2 \frac{x}{2}} \cdot \operatorname{Im} e^{i\frac{n}{2}x} = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \operatorname{Im} \left(\frac{\sin \left(\frac{n}{2}x \right)}{\sin \frac{x}{2}} e^{i\frac{n}{2}x} \right) \\ &= \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \operatorname{Im} \left(\frac{e^{inx} - 1}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} \right) = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \operatorname{Im} \left(e^{\frac{ix}{2}} \frac{e^{inx} - 1}{e^{ix} - 1} \right) \\ &= \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(k+\frac{1}{2})x} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin \left(k + \frac{1}{2} \right) x}{\sin \frac{x}{2}} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi \mathcal{D}_k(x). \end{aligned}$$

Um auch die dritte Eigenschaft zu verifizieren betrachte:

$$\int_{\pi \geq |x| > \delta} \varphi_n(x) dx \leq \frac{1}{2\pi n} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \cdot 2\pi$$

Für $n \geq N(\varepsilon, \delta) \geq \frac{1}{\varepsilon \sin^2 \frac{\delta}{2}}$ folgt daher $\int_{\pi \geq |x| > \delta} \varphi_n(x) dx < \varepsilon$ und die dritte Eigenschaft gilt damit. Damit folgt der folgende Satz:

Satz II.5.3 Satz von Fejer

Sei $f \in C_p([-\pi, \pi])$ stetig und 2π -periodisch (insbesondere gilt dann auch $f(-\pi) = f(\pi)$). Dann folgt

$$\sigma_N(x) \xrightarrow{\text{glm.}} f(x),$$

wobei $\sigma_N = \frac{1}{N} (S_0(x) + \dots + S_{N-1}(x))$ das Mittel der ersten N Partialsummen von $S_N(x) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}$ mit $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$ ist.

Die σ_N sind gerade die Cesaro-Summe, die wir in der Analysis II kennengelernt haben. Falls die Reihe der S_N konvergiert, so konvergiert die Cesaro-Summe gegen den selben Wert. Die σ_N können aber auch konvergieren, wenn die Reihe selbst nicht konvergiert, das Konvergenzverhalten der Cesaro-Summe ist im Allgemeinen also besser.

Beweis : Unsere Motivation ist

$$S_k(x) = \int_{[-\pi, \pi]} f(x + \tau) \mathcal{D}_k(\tau) d\tau.$$

Für die σ_N haben wir

$$\sigma_N(x) = \int_{[-\pi, \pi]} f(x + \tau) \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{D}_k(\tau)}_{\varphi_N(\tau)} d\tau,$$

woraus folgt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{[-\pi, \pi]} f(x + \tau) \varphi_N(\tau) d\tau = f(x).$$

Damit haben wir die punktweise Konvergenz bewiesen. Für die gleichmäßige Konvergenz betrachte

$$\sigma_N(t) - f(t) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(t + \tau) - f(t)) \varphi_N(\tau) d\tau$$

Und damit

$$|\sigma_N(t) - f(t)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t + \tau) - f(t)| \varphi_N(\tau) d\tau.$$

Da $[-\pi, \pi]$ kompakt ist folgt gleichmäßige Stetigkeit. Dann gilt für das Stetigkeitsmodul $\omega_{2\delta}(f) = \sup_{|t-t'| < 2\delta} |f(t) - f(t')| < \varepsilon$, wobei insbesondere $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ von t unabhängig ist. Dann folgt

$$\int_{-\delta(\varepsilon)}^{\delta(\varepsilon)} |f(t + \tau) - f(t)| \varphi_N(\tau) d\tau \leq \tilde{\varepsilon} \int_{-\delta(\varepsilon)}^{\delta(\varepsilon)} \varphi_N(\tau) d\tau \leq \tilde{\varepsilon} \cdot 1,$$

da $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_N(\tau) \, d\tau = 1$ und $\varphi_N \geq 0$ ist. Im nächsten Schritt folgt wegen $f \in C_p[-\pi, \pi]$, dass $|f(t + \tau) - f(t)| \leq C$ für alle t, τ gilt. Damit folgt

$$\left| \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) (f(t + \tau) - f(t)) \varphi_N(\tau) \, d\tau \right| \leq C \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) \varphi_N(\tau) \, d\tau < \varepsilon$$

für $N \geq N(\varepsilon, \delta(\varepsilon))$. Aus allem zusammen folgt $|\sigma_N(t) - f(t)| < 2\varepsilon$ für große N . \square

Folgerung:

1. $f \in C_p[-\pi, \pi]$ ist durch die Fourierkoeffizienten eindeutig bestimmt.
2. Das System $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ist vollständig im $\mathcal{L}^2([-\pi, \pi], dx)$, denn $C_p[-\pi, \pi]$ liegt dicht im $\mathcal{L}^2([-\pi, \pi], dx)$. Für $f \in \mathcal{L}^2$ existiert daher $f_\varepsilon \in C_p$, so dass $\|f - f_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^2} < \varepsilon$ gilt. Dann existiert $\sigma_{N(\varepsilon)}$ so, dass $|f_\varepsilon(t) - \sigma_{N(\varepsilon)}(t)| < \varepsilon$ gilt, wobei die c_k von f_ε stammen. Dann folgt $\|f_\varepsilon(t) - \sigma_{N(\varepsilon)}(t)\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f_\varepsilon - \sigma_{N(\varepsilon)}(t)|^2 \, dt \leq \varepsilon^2 2\pi$. Daraus folgt nun $\|f - \sigma_{N(\varepsilon)}\|_{\mathcal{L}^2} \leq \|f - f_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^2} + \|f_\varepsilon - \sigma_{N(\varepsilon)}\|_{\mathcal{L}^2} \leq \varepsilon + \varepsilon\sqrt{2\pi}$ und $\sigma_{N(\varepsilon)}(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} c_k(f_\varepsilon) e^{ikt}$ ist damit eine endliche Linearkombination von $e^{-iNt}, \dots, 1, \dots, e^{iNt}$.

Zusammenfassung zur Konvergenz von Fourierreihen

1. Sei $f \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi], dx)$. Dann ist $\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$ eine Orthonormalbasis. Dann gilt $c_k = \langle f, \varphi_k \rangle_{\mathcal{L}^2} = \int_{[-\pi, \pi]} f(t) \overline{\varphi_k(t)} \, dt$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_k |c_k|^2 = \|f\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \int_{[-\pi, \pi]} |f(t)|^2 \, dt$ und $f \stackrel{\mathcal{L}^2}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{c_k e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$ konvergiert absolut im \mathcal{L}^2 . Daraus folgt jedoch nicht punktweise Konvergenz, an dieser Stelle wird jedoch auf den nachfolgenden Satz von Carlsson verwiesen.
2. Sei $f \in C_p[-\pi, \pi]$. Da $C_p \subset \mathcal{L}^2$ gilt, folgt im Wesentlichen das selbe wie in 1. Der Satz von Carlsson ist jedoch nicht anwendbar. Wir haben aber den Satz von Fejer, der $\sigma_N \rightarrow f$ in $\|\cdot\|_{C_p}$ sichert. Ferner haben wir gesehen, dass φ_N eine Delta-Folge ist (der Dirichlet-Kern \mathcal{D}_k jedoch nicht). Mit der Dini-Bedingung haben wir zudem $S_N(t) \rightarrow f(t)$.
3. Sei $f \in \mathcal{L}^1([-\pi, \pi], dx)$, das heißt wir können die Fourierkoeffizienten $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi]} f(t) e^{-ikt} \, dt$ berechnen. Wir haben für diesen Fall jedoch keine allgemeine Konvergenztheorie. Es gibt jedoch einen \mathcal{L}^1 -Satz von Fejer. Ist nämlich $f \in \mathcal{L}^1([-\pi, \pi], dx)$, so konvergiert $\sigma_N \rightarrow f$ für $N \rightarrow \infty$ bezüglich \mathcal{L}^1 .

Satz II.5.4 Satz von Carlsson

Ist $f \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi], dx)$, so konvergiert $S_N(t) \rightarrow f(t)$ (punktweise) fast überall.

II.6. Wichtige Eigenschaften der Fouriertransformation

Für eine Funktion $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ haben wir die Fouriertransformierte von f als $\hat{f}(\lambda) = \mathcal{F}[f](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\lambda x} dx$ definiert. Dann ist $\mathcal{F}[f]$ stetig auf \mathbb{R} und es gilt $\mathcal{F}[f](\lambda) \rightarrow 0$ für $\lambda \rightarrow \pm\infty$. Falls f in $t = t_0$ die Dini-Bedingung erfüllt, so haben wir gesehen, dass dann auch die Umkehrformel $f(t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\lambda) e^{i\lambda t_0} d\lambda$ gilt. Wir können als Schreibweise $f(t_0) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](t_0)$ einführen. Wir führen nun folgende Abschätzung durch:

$$|\mathcal{F}[f](\lambda)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{\mathcal{L}^1}$$

Also ist $\mathcal{F}: \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$ ein stetig linearer Operator.

Lemma II.6.1

Ist $f(t), tf(t), \dots, t^n f(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, so folgt, dass $\hat{f} = \mathcal{F}[f]$ n -fach stetig differenzierbar ist. Außerdem gilt $\mathcal{F}^{(k)}[f](\lambda) \rightarrow 0$ für $\lambda \rightarrow \pm\infty$ und alle $k = 0, \dots, n$.

Beweis : Für den Differentialquotienten gilt mit $x^{-1}(e^{-ix} - 1) \leq C$:

$$\begin{aligned} h^{-1}(\hat{f}(\lambda + h) - \hat{f}(\lambda)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} f(t) [e^{-i(\lambda+h)t} - e^{-i\lambda t}] dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \cdot t \cdot \underbrace{\left[\frac{e^{-iht} - 1}{th} \right]}_{\rightarrow -i} e^{-i\lambda t} dt \end{aligned}$$

Mit dem Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz folgt nun

$$\hat{f}'(\lambda) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \cdot t e^{-i\lambda t} dt = \mathcal{F}[(-it)f](\lambda).$$

Wiederholen dieser Argumentation liefert dann schließlich

$$\hat{f}^{(n)}(\lambda) = (-it)^n \mathcal{F}[f](\lambda).$$

Der Rest folgt aus einfachen Überlegungen. □

Lemma II.6.2

f sei n -fach stetig differenzierbar und es gelte $f, f', \dots, f^{(n)} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Dann folgt $\mathcal{F}[f](\lambda) = o(|\lambda|^{-n})$ für $\lambda \rightarrow \pm\infty$.

Beweis : Wir betrachten

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\lambda t} dt = f(t)e^{-i\lambda t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + (i\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t} dt.$$

Nun wissen wir wegen der stetigen Differenzierbarkeit $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(\tau) d\tau$. Damit folgt, dass der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$ existiert. Damit erhalten wir

$$\mathcal{F}[f'](\lambda) = i\lambda \mathcal{F}[f](\lambda).$$

Das Bilden von Ableitungen geht also in Produkte über. Wiederholen dieser Vorgehensweise liefert

$$\mathcal{F}[f^{(n)}](\lambda) = (i\lambda)^n \mathcal{F}[f](\lambda).$$

Damit ist der Beweis fertig. □

Die beiden Formeln, die wir im Zuge der Beweise entwickelt haben, sind zentral. Sie lauten:

$$\begin{aligned} \hat{f}^{(n)}(\lambda) &= \mathcal{F}[(-it)^n f(t)](\lambda) \\ \mathcal{F}[f^{(n)}](\lambda) &= (i\lambda)^n \mathcal{F}[f](\lambda). \end{aligned}$$

Definition II.6.3 Die Funktionenklasse $S(\mathbb{R})$ von Schwartz

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sei beliebig oft differenzierbar. Dann gilt $f \in S(\mathbb{R})$ genau dann, wenn für alle $p, q \in \mathbb{N}_0$ eine Konstante $C(p, q) < \infty$ existiert, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|x^p f^{(q)}(x)| \leq C(p, q)$$

Wir nennen $S(\mathbb{R})$ die Schwartzsche Funktionenklasse.

Lemma II.6.4

Sei $f \in S_t(\mathbb{R})$. Dann folgt:

1. $\mathcal{F}[f] \in S_\lambda(\mathbb{R})$
2. $\mathcal{F}: S_t \rightarrow S_\lambda$ ist bijektiv

Beweis : Der Beweis erfolgt über die beiden letzten Lemmata. Die erste Eigenschaft wird dem Leser überlassen. Für die zweite Eigenschaft gilt für $f \in S_t(\mathbb{R})$, dass sie die Dini-Bedingung erfüllt. Damit gilt $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda$ für $t \in \mathbb{R}$. Gilt nun $f(t) \not\equiv 0$, so folgt auch $\hat{f} \not\equiv 0$ und damit gilt $\ker \mathcal{F} = \{0\}$, also ist \mathcal{F} injektiv. Für die Surjektivität sei $g \in S_\lambda(\mathbb{R})$ und wir fragen uns, ob es $f \in S_t(\mathbb{R})$ mit $\mathcal{F}[f] = g$ gibt. Zunächst ist $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda = \mathcal{F}[g](-t)$. Ferner ist $\mathcal{F}[f](\lambda) = \mathcal{F}^{-1}[f](-\lambda) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[g](-t)](-\lambda)$. Damit erhalten wir $\mathcal{F}[f](\lambda) = g(\lambda)$. \square

II.7. Fouriertransformation und Faltung**Definition II.7.1 Faltung**

Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Dann heißt

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

die Faltung der Funktionen f und g .

Frage: In welchem Sinn existiert $f * g$? Der Satz von Fubini sagt, dass für $h(t, \tau) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ gilt, dass $\int_{\mathbb{R}^2} h(t, \tau) dt d\tau = \int_{\mathbb{R}} d\tau \left(\int_{\mathbb{R}} h(t, \tau) dt \right)$, wobei $\int_{\mathbb{R}} h(t, \tau) dt$ insbesondere τ -fast überall existiert. Die Reihenfolge lässt sich vertauschen. Mit $h(t, \tau) = f(\tau)g(t - \tau)$ folgt dann

$$\begin{aligned} \iint |h(t, \tau)| dt d\tau &= \int d\tau \int dt |f(\tau)| \cdot |g(t - \tau)| \\ &= \int d\tau |f(\tau)| \cdot \|g\|_{\mathcal{L}^1} \\ &= \|f\|_{\mathcal{L}^1} \cdot \|g\|_{\mathcal{L}^1}. \end{aligned}$$

Es ist aber auch $\iint |h(t, \tau)| dt d\tau \geq \int dt \left| \int d\tau h(t, \tau) \right| = \int dt |(f * g)(t)|$. Damit erhalten wir die Hausdorff-Young-Ungleichung:

$$\|f * g\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^1} \cdot \|g\|_{\mathcal{L}^1}$$

Lemma II.7.2

Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Dann existiert die Fouriertransformation der Faltung und es gilt

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}[f * g](\lambda) = \mathcal{F}[f](\lambda) \cdot \mathcal{F}[g](\lambda).$$

Beweis : Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda t} (f * g)(t) dt &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda t} \int_{\mathbb{R}} f(\tau) g(t - \tau) d\tau dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} d\tau e^{-i\lambda \tau} f(\tau) \int_{\mathbb{R}} dt e^{-i\lambda(t-\tau)} g(t - \tau) \\ &\stackrel{s=t-\tau}{=} \sqrt{2\pi} \mathcal{F}[f](\lambda) \cdot \sqrt{2\pi} \mathcal{F}[g](\lambda). \end{aligned}$$

Damit sind wir fertig. □

Wie sieht es nun mit Fouriertransformationen im $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ aus? Für endliche Intervalle gilt, dass aus $f \in \mathcal{L}^2[-\pi, \pi]$ auch $f \in \mathcal{L}^1[-\pi, \pi]$ folgt. Aus $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ folgt im Allgemeinen jedoch *nicht* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Anmerkung: $S(\mathbb{R})$ ist dicht in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Sind nun $f, g \in S$, dann folgt $\mathcal{F}[f], \mathcal{F}[g] \in S \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Satz II.7.3 Satz von Plancherell

Für $f, g \in S$ gilt

$$\langle \mathcal{F}[f], \mathcal{F}[g] \rangle_{\mathcal{L}^2} = \langle f, g \rangle_{\mathcal{L}^2}.$$

Ein wichtiger Spezialfall ist

$$\|\mathcal{F}[f]\|_{\mathcal{L}^2} = \|f\|_{\mathcal{L}^2}.$$

Beweis : Es gilt

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[f], \mathcal{F}[g] \rangle_{\mathcal{L}^2} &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[f](\lambda) \overline{\mathcal{F}[g](\lambda)} \, d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} d\lambda \left(\int_{\mathbb{R}} f(\tau) e^{-i\lambda\tau} \, d\tau \right) \overline{\left(\int_{\mathbb{R}} g(s) e^{-i\lambda s} \, ds \right)} \\ &= \int_{\mathbb{R}} d\tau f(\tau) \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} d\lambda e^{i\lambda\tau} \left(\int_{\mathbb{R}} ds g(s) e^{-i\lambda s} \right)}_{\overline{g(\tau)} = \langle f, g \rangle_{\mathcal{L}^2}}. \end{aligned}$$

Damit sind wir fertig. □

Vorlesung vom 11.07.2011 wird evtl. noch nachgetragen

Vorlesung vom 13.07.2011 wird evtl. noch nachgetragen

Korrektheit:

1. $\varphi \in \mathcal{D} \Rightarrow \varphi \circ \pi^{-1} \in \mathcal{D}$, also ist $(f, \varphi \circ \pi^{-1})$ wohldefiniert
2. Linearität (ist klar)
3. Stetigkeit: Sei $\varphi_n \rightarrow 0$ bezüglich \mathcal{D} . Da $\pi^{-1}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ stetig ist, folgt auch $\varphi_n \circ \pi^{-1} \rightarrow 0$ bezüglich \mathcal{D} . Da $f \in \mathcal{D}'$ ist, folgt $(f, \varphi_n \circ \pi^{-1}) \rightarrow 0$

Beispiel: Sei $A = E$, dann ist $\det A = 1$ und $y = \pi x = x + b$. Dann ist $x = \pi^{-1}y = y - b$ und $(f \circ \pi, \varphi) = (f, \varphi \circ \pi^{-1}) = (f, \varphi(x - b))$. Insbesondere ist $(\delta \circ \pi, \varphi) = (\delta(x + b), \varphi) = \varphi(-b)$.

Beispiel: Sei $A = cE$ mit $c > 0$ und $b \equiv 0$. Dann ist $(\delta \circ \pi, \varphi) = \frac{1}{|\det A|} (\delta, \varphi \circ \pi^{-1}) = \frac{1}{|\det A|} (\varphi \circ \pi^{-1})(0) = c^{-d} \varphi(0)$.

Multiplikation mit einer glatten Funktion

Es sei $f \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ und $\alpha \in C^\infty$. Dann ist $\alpha f \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Dann ist wegen $\alpha\varphi \in \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned} (\alpha f, \varphi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \alpha(x) f(x) \varphi(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \alpha(x) \varphi(x) \, dx \\ &= (f, \alpha\varphi). \end{aligned}$$

Definition II.7.4

Für $f \in \mathcal{D}'$ und $\alpha \in C^\infty$ sei $\alpha f \in \mathcal{D}'$ gegeben durch $(\alpha f, \varphi) = (f, \alpha\varphi)$ mit $\varphi \in \mathcal{D}$.

Korrektheit:

1. Aus $\varphi \in \mathcal{D}$ folgt $\alpha\varphi \in \mathcal{D}$ und damit ist $(f, \alpha\varphi)$ wohldefiniert
2. Linearität (ist klar)
3. Stetigkeit: Gilt $\varphi_n \rightarrow 0$ in \mathcal{D} , so folgt, da $T_\alpha: \varphi \rightarrow \alpha\varphi$ stetig von \mathcal{D} nach \mathcal{D} abbildet, $\alpha\varphi_n \rightarrow 0$ in \mathcal{D} und damit $(f, \alpha\varphi_n) \rightarrow 0$.

Beispiel: Sei $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. Dann ist $(\alpha\delta, \varphi) = (\delta, \alpha\varphi) = \alpha(0)\varphi(0)$, zum Beispiel bei $d = 1$ ist dann $x\delta = 0$.

“Das Wichtige an Distributionen ist, dass Sie ihr Hirn einfach ausschalten.“
— Timo Weidl

Beispiel: Sei $d = 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} \left(xP\frac{1}{x}, \varphi\right) &= \left(P\frac{1}{x}, x\varphi\right) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} \cdot x \cdot \varphi(x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \varphi(x) \, dx \\ &= (1, \varphi). \end{aligned}$$

Also ist $xP\frac{1}{x} = 1$ in \mathcal{D}' .

Vorsicht: $0 = 0P\frac{1}{x} = (x\delta)P\frac{1}{x} = \delta(xP\frac{1}{x}) = \delta \cdot 1 = \delta$.

Das Differenzieren von Distributionen

Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. Dann ist $f' \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. Wir haben dann

$$\begin{aligned} (f'_{x_j}, \varphi) &= \int_{\mathbb{R}^d} f'_{x_j}(x) \varphi(x) \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \underbrace{dx'}_{j \text{ fehlt}} \left(f(x) \varphi(x) \Big|_{x_j=-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi'(x) \, dx_j \right) \\ &= -(f, \varphi'_{x_j}). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir $(\partial^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \varphi)$. Dies erheben wir zur Definition.

Definition II.7.5

Sei $f \in \mathcal{D}'$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Dann ist $\partial^\alpha f \in \mathcal{D}'$ gegeben durch $(\partial^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \varphi)$.

Korrektheit:

1. Ist $\varphi \in \mathcal{D}$, so ist auch $\partial^\alpha \varphi \in \mathcal{D}$ und damit $(f, \partial^\alpha \varphi)$ wohldefiniert
2. Linearität (ist klar)
3. Stetigkeit: Sei $\varphi_n \rightarrow 0$ bezüglich \mathcal{D} . Da $\partial^\alpha: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ stetig ist, folgt $\partial^\alpha \varphi_n \rightarrow 0$ bezüglich \mathcal{D} und damit $(f, \partial^\alpha \varphi_n) \rightarrow 0$.

Beispiel: Sei $d = 1$. Dann ist $(\delta', \varphi) = (-1)(\delta, \varphi') = -\varphi'(0)$.

Rechenregeln: Gilt $f, g \in \mathcal{D}'$, so folgt $\partial^\alpha(f + g) = \partial^\alpha f + \partial^\alpha g$, $\partial^\alpha(\partial^\beta f) = \partial^{\alpha+\beta} f$ und $\partial^\alpha(cf) = c\partial^\alpha f$.

Produktregeln: Gilt $f \in \mathcal{D}'$ und $\alpha \in C^\infty$, so gilt $\frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha f) = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_j}\right) f + \alpha \frac{\partial f}{\partial x_j}$.

Beweis : Es sei $\partial := \frac{\partial}{\partial x_j}$. Dann ist

$$\begin{aligned} (\partial(\alpha f), \varphi) &= -(\alpha f, \partial \varphi) = -(f, \alpha \partial \varphi) = -(f, \partial(\alpha \varphi) - (\partial \alpha) \varphi) \\ &= -(f, \partial(\alpha \varphi)) + (f, (\partial \alpha) \varphi) = (\partial f, \alpha \varphi) + ((\partial \alpha) f, \varphi) \\ &= (\alpha(\partial f) + (\partial \alpha) f, \varphi). \end{aligned}$$

Fertig. □

Satz II.7.6

Die Ableitung $\partial^\alpha: \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}'$ ist linear und stetig.

Beweis : Sei $f_n \rightarrow 0$, dies ist äquivalent zu $(f_n, \varphi) \rightarrow 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}$. Dann ist $(f'_n, \varphi) = -(f_n, \varphi') \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und damit $f'_n \rightarrow 0$ in \mathcal{D}' . □

Folgerung: Sei $f_n \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}$ mit $f_n \rightarrow f$ in $\mathcal{L}_1^{\text{loc}}$. Dann ist $(f_n, \varphi) = \int f_n \varphi \, dx \rightarrow \int f \varphi \, dx$ und damit $f_n \rightarrow f$ in \mathcal{D}' . Also folgt $\partial^\alpha f_n \rightarrow \partial^\alpha f$ in \mathcal{D}' .

Definition II.7.7

Sei $f_k \in \mathcal{D}'$, dann ist $\sum_{k=1}^n f_k = S_n \in \mathcal{D}'$. Falls $S_n \rightarrow S$ in \mathcal{D}' gilt, so sagen wir $S = \sum_{k=1}^\infty f_k$ in \mathcal{D}' .

Folgerung: Dann gilt auch $\partial^\alpha S = \sum_{k=1}^\infty \partial^\alpha f_k$.

Beispiel: Sei $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ mit $c_k \in \mathbb{C}$, die sich durch $|c_k| \leq a|k|^m + b$ für gewisse $a, b > 0$ abschätzen lassen.

Satz II.7.8

Die Reihe $\sum_{k=-\infty}^\infty c_k e^{ikx} = S$ konvergiert in \mathcal{D}' .

Beweis : Man betrachtet die Reihe $\sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} \frac{c_k}{(ik)^{m+2}} e^{ikx} =: \tilde{S}(x)$. Man geht dann über gleichmäßige Konvergenz zu Konvergenz in $\mathcal{L}_1^{\text{loc}}$, dann zur Konvergenz in \mathcal{D}' . Dann folgt der Rest durch Differenzieren. \square

Stammfunktion einer Distribution

Definition II.7.9

Sei $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Dann heißt $F = f^{(-1)} \in \mathcal{D}'$ Stammfunktion genau dann, wenn $F' = f$, das heißt $(F, \varphi') = -(f, \varphi)$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}$.

Achtung: $(F, \varphi') = -(f, \varphi)$ ist nur auf $\psi = \varphi'$ mit $\varphi \in \mathcal{D}$ gegeben. Daher:

Satz II.7.10

Für jedes $f \in \mathcal{D}'$ existiert eine Stammfunktion $F \in \mathcal{D}'$. Diese ist bis auf eine additive Konstante eindeutig.

Folgerung: Ist $f' = 0$, so folgt $f \equiv \text{const.}$